5. АЛГЕБРА ОПЕРАТОРА

(5.1) Који су од следећих оператора који пресликавају $\mathbb{V}_1$ у $\mathbb{V}_2$ *линеарни оператори*

(а) $\mathbb{V}_1=\mathbb{R}^2,\ \mathbb{V}_2=\mathbb{R}^2:\ \hat{A}(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1+\xi_2,\xi_1)$;

(б) $\mathbb{V}_1=\mathbb{R}^3,\ \mathbb{V}_2=\mathbb{R}:\ \hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=2\xi_1-3\xi_2+4\xi_3$;

(в) $\mathbb{V}_1=\mathbb{R}^2,\ \mathbb{V}_2=\mathbb{R}^2:\ \hat{C}(\xi_1,\xi_2)=(|\xi_1|,0)$;

(г) $\mathbb{V}_1=\mathbb{R}^2,\ \mathbb{V}_2=\mathbb{R}:\ \hat{D}(\xi_1,\xi_2)=\xi_1\xi_2$;

(д) $\mathbb{V}_1=\mathbb{R}^2,\ \mathbb{V}_2=\mathbb{R}^3:\ \hat{E}(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1+1,2\xi_2,\xi_1+\xi_2)$;

(ђ) $\mathbb{V}_1=\mathbb{R}^2,\ \mathbb{V}_2=\mathbb{R}^2:\ \hat{F}(\xi_1,\xi_2)=(\sin\xi_1,\cos\xi_1)$;

(е) $\mathbb{V}_1=\mathbb{R}^3,\ \mathbb{V}_2=\mathbb{R}^3:\ \hat{G}\vec{v}=\vec{q}\times\vec{v}$.

Најопштија дефиниција оператора јесте да је он пресликавање линеарног векторског простора $\mathbb{V}$ у линеарни векторски простор $\mathbb{V}$ ($\hat{A}:\mathbb{U}\to\mathbb{U}$). Другачије речено, ако је вектор $|o\rangle$ објекат пресликавања, а вектор $|l\rangle$ лик пресликавања, регуларни оператор $\hat{A}$ представља пресликавање једног објекта у само један лик: $|l\rangle=\hat{A}|o\rangle$.

Линеарни оператор је регуларни оператор који линеарну комбинацију објеката пресликава у линеарну комбинацију ликова

$$\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|o_i\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\hat{A}|o_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|l_i\rangle.$$

(а) Први задати оператор $\hat{A}(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1+\xi_2,\xi_1)$ пресликава 2Д простор уређених парова $\mathbb{R}^2$ у 2Д простор уређених парова $\mathbb{R}^2$, $\hat{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

Да би овај оператор био линеаран, он мора линеарну комбинацију објеката пресликати у линеарну комбинацију ликова

$$\hat{A}\big(\alpha|o_1\rangle+\beta|o_2\rangle\big)=\hat{A}\big(\alpha(\mu_1,\mu_2)+\beta(\eta_1,\eta_2)\big)=\hat{A}\big((\alpha\mu_1,\alpha\mu_2)+(\beta\eta_1,\beta\eta_2)\big)$$

$$\begin{aligned}
&=\hat{A}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1,\alpha\mu_2+\beta\eta_2)\overset{\mathrm{d}}{=}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1+\alpha\mu_2+\beta\eta_2,\alpha\mu_1+\beta\eta_1)\\
&=\big(\alpha(\mu_1+\mu_2)+\beta(\eta_1+\eta_2),\alpha\mu_1+\beta\eta_1\big)=\big(\alpha(\mu_1+\mu_2),\alpha\mu_1\big)+\big(\beta(\eta_1+\eta_2),\beta\eta_1\big)\\
&=\alpha\big((\mu_1+\mu_2),\mu_1\big)+\beta\big((\eta_1+\eta_2),\eta_1\big)\overset{\mathrm{d}}{=}\alpha\hat{A}(\mu_1,\mu_2)+\beta\hat{A}(\eta_1,\eta_2)\\
&=\alpha\hat{A}|o_1\rangle+\beta\hat{A}|o_2\rangle=\alpha|l_1\rangle+\beta|l_2\rangle
\end{aligned}$$

Значи, оператор $\hat{A}(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1+\xi_2,\xi_1)$ јесте *линеаран* оператор.

(б) Други задати оператор $\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=2\xi_1-3\xi_2+4\xi_3$ пресликава 3Д простор уређених тројки $\mathbb{R}^3$ у 1Д простор скалара $\mathbb{R}^1$, $\hat{B}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^1$.

Да би овај оператор био линеаран, он мора линеарну комбинацију објеката пресликати у линеарну комбинацију ликова

$$\begin{aligned}
\hat{B}\left(\alpha|o_1\rangle+\beta|o_2\rangle\right) &= \hat{B}\left(\alpha(\mu_1,\mu_2,\mu_3)+\beta(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\right)\\
&= \hat{B}\left((\alpha\mu_1,\alpha\mu_2,\alpha\mu_3)+(\beta\eta_1,\beta\eta_2,\beta\eta_3)\right)\\
&= \hat{B}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1,\alpha\mu_2+\beta\eta_2,\alpha\mu_3+\beta\eta_3)\\
&\overset{\mathrm{d}}{=} 2(\alpha\mu_1+\beta\eta_1)-3(\alpha\mu_2+\beta\eta_2)+4(\alpha\mu_3+\beta\eta_3)\\
&= (2\alpha\mu_1-3\alpha\mu_2+4\alpha\mu_3)+(2\beta\eta_1-3\beta\eta_2+4\beta\eta_3)\\
&= \alpha(2\mu_1-3\mu_2+4\mu_3)+\beta(2\eta_1-3\eta_2+4\eta_3)\\
&\overset{\mathrm{d}}{=} \alpha\,\hat{B}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)+\beta\,\hat{B}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\\
&= \alpha\,\hat{B}|o_1\rangle+\beta\,\hat{B}|o_2\rangle=\alpha\,|\,l_1\rangle+\beta\,|\,l_2\rangle
\end{aligned}$$

Значи, оператор $\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=2\xi_1-3\xi_2+4\xi_3$ јесте *линеаран* оператор.

(в) Трећи задати оператор $\hat{C}(\xi_1,\xi_2)=(|\,\xi_1|,0)$ пресликава 2Д простор уређених парова $\mathbb{R}^2$ у 2Д простор уређених парова $\mathbb{R}^2$, $\hat{C}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

Да би овај оператор био линеаран, он мора линеарну комбинацију објеката пресликати у линеарну комбинацију ликова

$$\begin{aligned}
\hat{C}\left(\alpha|o_1\rangle+\beta|o_2\rangle\right) &= \hat{C}\left(\alpha(\mu_1,\mu_2)+\beta(\eta_1,\eta_2)\right)\\
&= \hat{C}\left((\alpha\mu_1,\alpha\mu_2)+(\beta\eta_1,\beta\eta_2)\right)\\
&= \hat{C}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1,\alpha\mu_2+\beta\eta_2)\overset{\mathrm{d}}{=}(|\alpha\mu_1+\beta\eta_1|,0)\\
&\neq (|\alpha|\mu_1+|\beta|\eta_1,0)=(|\alpha|\mu_1,0)+(|\beta|\eta_1,0)\\
&\overset{\mathrm{d}}{=} \alpha\,\hat{C}(\mu_1,\mu_2)+\beta\,\hat{C}(\eta_1,\eta_2)\\
&= \alpha\,\hat{C}|o_1\rangle+\beta\,\hat{C}|o_2\rangle=\alpha\,|\,l_1\rangle+\beta\,|\,l_2\rangle
\end{aligned}$$

Као последица чињенице да $|\alpha\mu_1+\beta\eta_1|\neq|\alpha|\mu_1+|\beta|\eta_1$, оператор $\hat{C}(\xi_1,\xi_2)=(|\,\xi_1|,0)$ није *линеаран* оператор.

(г) Четврти задати оператор $\hat{D}(\xi_1,\xi_2)=\xi_1\xi_2$ пресликава 2Д простор уређених парова $\mathbb{R}^2$ у 1Д простор скалара $\mathbb{R}^1$, $\hat{D}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Да би овај оператор био линеаран, он мора линеарну комбинацију објеката пресликати у линеарну комбинацију ликова

$$
\begin{aligned}
\hat{D}\left(\alpha|o_1\rangle+\beta|o_2\rangle\right) &= \hat{D}\left(\alpha(\mu_1,\mu_2)+\beta(\eta_1,\eta_2)\right) \\
&= \hat{D}\left((\alpha\mu_1,\alpha\mu_2)+(\beta\eta_1,\beta\eta_2)\right) \\
&= \hat{D}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1,\alpha\mu_2+\beta\eta_2) \overset{\mathrm{d}}{=} (\alpha\mu_1+\beta\eta_1)(\alpha\mu_2+\beta\eta_2) \\
&= \alpha^2\mu_1\mu_2+\alpha\beta\mu_1\eta_2+\beta\alpha\eta_1\mu_2+\beta^2\eta_1\eta_2 \\
&\neq \alpha\mu_1\mu_2+\beta\eta_1\eta_2 \overset{\mathrm{d}}{=} \alpha\hat{D}(\mu_1,\mu_2)+\beta\hat{D}(\eta_1,\eta_2) \\
&= \alpha\hat{D}|o_1\rangle+\beta\hat{D}|o_2\rangle = \alpha|l_1\rangle+\beta|l_2\rangle
\end{aligned}
$$

Како $\alpha^2\mu_1\mu_2+\alpha\beta\mu_1\eta_2+\beta\alpha\eta_1\mu_2+\beta^2\eta_1\eta_2 \neq \alpha\mu_1\mu_2+\beta\eta_1\eta_2$, оператор $\hat{D}(\xi_1,\xi_2)=\xi_1\xi_2$ није *линеаран* оператор.

(д) Пети задати оператор $\hat{E}(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1+1,2\xi_2,\xi_1+\xi_2)$ пресликава 2Д простор уређених парова $\mathbb{R}^2$ у 3Д простор уређених тројки $\mathbb{R}^3$, $\hat{E}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$.

Да би овај оператор био линеаран, он мора линеарну комбинацију објеката пресликати у линеарну комбинацију ликова

$$
\begin{aligned}
\hat{E}\left(\alpha|o_1\rangle+\beta|o_2\rangle\right) &= \hat{E}\left(\alpha(\mu_1,\mu_2)+\beta(\eta_1,\eta_2)\right) \\
&= \hat{E}\left((\alpha\mu_1,\alpha\mu_2)+(\beta\eta_1,\beta\eta_2)\right) \\
&= \hat{E}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1,\alpha\mu_2+\beta\eta_2) \overset{\mathrm{d}}{=} \left(\alpha\mu_1+\beta\eta_1+1,2(\alpha\mu_2+\beta\eta_2),\alpha\mu_1+\beta\eta_1+\alpha\mu_2+\beta\eta_2\right) \\
&= \left(\alpha\mu_1+\beta\eta_1+1,2(\alpha\mu_2+\beta\eta_2),\alpha(\mu_1+\mu_2)+\beta(\eta_1+\eta_2)\right) \\
&\neq \left(\alpha\mu_1+\alpha+\beta\eta_1+\beta,2(\alpha\mu_2+\beta\eta_2),\alpha(\mu_1+\mu_2)+\beta(\eta_1+\eta_2)\right) \\
&= \alpha(\mu_1+1,2\mu_2,\mu_1+\mu_2)+\beta(\eta_1+1,2\eta_2,\eta_1+\eta_2) \overset{\mathrm{d}}{=} \alpha\hat{E}(\mu_1,\mu_2)+\beta\hat{E}(\eta_1,\eta_2) \\
&= \alpha\hat{E}|o_1\rangle+\beta\hat{E}|o_2\rangle = \alpha|l_1\rangle+\beta|l_2\rangle
\end{aligned}
$$

Пошто $\alpha\mu_1+\beta\eta_1+1 \neq \alpha\mu_1+\beta\eta_1+\alpha+\beta$, оператор $\hat{E}(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1+1,2\xi_2,\xi_1+\xi_2)$ никако не може бити *линеаран* оператор.

(ђ) Шести задати оператор $\hat{F}(\xi_1,\xi_2)=(\sin\xi_1,\cos\xi_1)$ пресликава 2Д простор уређених парова $\mathbb{R}^2$ у 2Д простор уређених парова $\mathbb{R}^2$, $\hat{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

Да би овај оператор био линеаран, он мора линеарну комбинацију објеката пресликати у линеарну комбинацију ликова

$$
\begin{aligned}
\hat{F}\left(\alpha|o_1\rangle+\beta|o_2\rangle\right) &= \hat{F}\left(\alpha(\mu_1,\mu_2)+\beta(\eta_1,\eta_2)\right) \\
&= \hat{F}\left((\alpha\mu_1,\alpha\mu_2)+(\beta\eta_1,\beta\eta_2)\right) \\
&= \hat{F}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1,\alpha\mu_2+\beta\eta_2) \overset{\mathrm{d}}{=} \left(\sin(\alpha\mu_1+\beta\eta_1),\cos(\alpha\mu_1+\beta\eta_1)\right) \\
&= (\sin\alpha\mu_1\cos\beta\eta_1+\cos\alpha\mu_1\sin\beta\eta_1,\cos\alpha\mu_1\cos\beta\eta_1-\sin\alpha\mu_1\sin\beta\eta_1) \\
&\neq (\alpha\sin\mu_1+\beta\sin\eta_1,\alpha\cos\mu_1+\beta\cos\eta_1)
\end{aligned}
$$

$$= \alpha(\sin\mu_1, \cos\mu_1) + \beta(\sin\eta_1, \cos\eta_1) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \alpha\,\hat{F}(\mu_1, \mu_2) + \beta\,\hat{F}(\eta_1, \eta_2)$$
$$= \alpha\hat{F}\left|o_1\right\rangle + \beta\hat{F}\left|o_2\right\rangle = \alpha\left|l_1\right\rangle + \beta\left|l_2\right\rangle$$

Сасвим је јасно да је $\sin\alpha\mu_1\cos\beta\eta_1 + \cos\alpha\mu_1\sin\beta\eta_1 \neq \alpha\sin\mu_1 + \beta\sin\eta_1$, а такође је јасно и да је $\cos\alpha\mu_1\cos\beta\eta_1 - \sin\alpha\mu_1\sin\beta\eta_1 \neq \alpha\cos\mu_1 + \beta\cos\eta_1$, те оператор $\hat{F}(\xi_1, \xi_2) = (\sin\xi_1, \cos\xi_1)$ никако не може бити *линеаран* оператор.

(е) Седми задати оператор $\hat{G}\vec{v} = \vec{q}\times\vec{v}$ пресликава 3Д простор класичних вектора $\mathbb{R}^3$ у 3Д простор класичних вектора $\mathbb{R}^3$: $\hat{G}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Да би овај оператор био линеаран, он мора линеарну комбинацију објеката пресликати у линеарну комбинацију ликова

$$\hat{G}(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \vec{q}\times(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \vec{q}\times\alpha\vec{v}_1 + \vec{q}\times\beta\vec{v}_2 = \alpha(\vec{q}\times\vec{v}_1) + \beta(\vec{q}\times\vec{v}_2) = \alpha\hat{G}\vec{v}_1 + \beta\hat{G}\vec{v}_2 .$$

Значи да је оператор $\hat{G}\vec{v} = \vec{q}\times\vec{v}$ заиста *линеаран* оператор.

(5.2) $\hat{K}$ је оператор који сваком комплексном броју $z \in \mathbb{Z}$ придружује комплексно коњугован број $z^* \in \mathbb{Z}$

$$\hat{K}\, z = z^* .$$

Показати да је $\hat{K}$ *антилинеаран* оператор (преводи линеарну комбинацију објеката у линеарну комбинацију ликова али са комплексно коњугованим коефицијентима!) ако је $\mathbb{C}$ векторски простор над $\mathbb{C}$. Такође показати да је $\hat{K}$ *линеаран* оператор ако је $\mathbb{C}$ векторски простор над $\mathbb{R}$.

(а) Нека је $\mathbb{C}$ векторски простор над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ и нека је $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Сада треба проверити да ли је оператор $\hat{K}$ антилинеаран

$$\begin{aligned}\hat{K}(\alpha o_1 + \beta o_2) &= \hat{K}(\alpha z_1 + \beta z_2) = (\alpha z_1 + \beta z_2)^* = (\alpha z_1)^* + (\beta z_2)^* \\ &= \alpha^* z_1^* + \beta^* z_2^* = \alpha^* \hat{K} z_1 + \beta^* \hat{K} z_2 = \alpha^* l_1 + \beta^* l_2\end{aligned}$$

Како оператор $\hat{K}$ пресликава линеарну комбинацију објеката у линеарну комбинацију ликова са комплексно коњугованим коефицијентима, он је онда *антилинеаран*.

(б) Нека је $\mathbb{C}$ векторски простор над пољем комплексних бројева $\mathbb{R}$: $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ и нека је $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Сада треба проверити да ли је оператор $\hat{K}$ линеаран

$$\hat{K}(\alpha o_1 + \beta o_2) = \hat{K}(\alpha z_1 + \beta z_2) = (\alpha z_1 + \beta z_2)^* = (\alpha z_1)^* + (\beta z_2)^* = \alpha^* z_1^* + \beta^* z_2^* .$$

Будући да су скалари α и β реални бројеви, онда је

$$\hat{K}(\alpha o_1 + \beta o_2) = \alpha\, \hat{K} z_1 + \beta\, \hat{K} z_2 = \alpha\, l_1 + \beta\, l_2 .$$

Како оператор $\hat{K}$ пресликава линеарну комбинацију објеката у линеарну комбинацију ликова са реалним коефицијентима, он је онда *линеаран*.

(5.3) Који су од следећих оператора (који пресликавају $\mathbb{V}_1$ у $\mathbb{V}_2$) *линеарни оператори*

(а) $\mathbb{V}_1 = \mathbb{P}^n$, $\mathbb{V}_2 = \mathbb{P}^n$: $\hat{A}\, f(t) = f(at+b)$, $(a \neq 0)$;

(б) $\mathbb{V}_1 = \mathbb{P}^n$, $\mathbb{V}_2 = \mathbb{P}^{n+1}$: $\hat{B}\, f(t) = t\, f(t)$;

(в) $\mathbb{V}_1 = \mathbb{P}^n$, $\mathbb{V}_2 = \mathbb{P}^{2n}$: $\hat{C}\, f(t) = f(t^n)$;

(г) $\mathbb{V}_1 = \mathbb{P}^n$, $\mathbb{V}_2 = \mathbb{P}^n$: $\hat{D}\, f(t) = \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$?

Иначе, $f(t)$ је полином из простора $\mathbb{P}^n$.

(а) Треба проверити да ли је оператор $\hat{A}\, f(t) = f(at+b)$, $(a \neq 0)$, који пресликава векторски простор $\mathbb{P}^n$ у векторски простор $\mathbb{P}^n$, линеаран

$$\begin{aligned}\hat{A}\big(\alpha\, o_1(t) + \beta\, o_2(t)\big) &= \hat{A}\big(\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)\big) = \hat{A}\, f_e(t) = f_e(at+b) \\ &= \alpha\, f_1(at+b) + \beta\, f_2(at+b) = \alpha\, \hat{A}\, f_1(t) + \beta\, \hat{A}\, f_2(t) = \alpha\, l_1(t) + \beta\, l_2(t)\end{aligned}$$

Будући да задати оператор $\hat{A}$ пресликава линеарну комбинацију објеката у линеарну комбинацију ликова, он представља *линеаран* оператор.

(б) Да ли је оператор $\hat{B}\, f(t) = t\, f(t)$, који пресликава векторски простор $\mathbb{P}^n$ у векторски простор $\mathbb{P}^{n+1}$, линеаран?

$$\begin{aligned}\hat{B}\big(\alpha\, o_1(t) + \beta\, o_2(t)\big) &= \hat{B}\big(\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)\big) = \hat{B}\, f_e(t) \stackrel{\mathrm{d}}{=} t\, f_e(t) = t\big(\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)\big) \\ &= \alpha\, t\, f_1(t) + \beta\, t\, f_2(t) = \alpha\, \hat{B}\, f_1(t) + \beta\, \hat{B}\, f_2(t) = \alpha\, l_1(t) + \beta\, l_2(t)\end{aligned}$$

Пошто задати оператор $\hat{B}$ пресликава линеарну комбинацију објеката у линеарну комбинацију ликова, он представља *линеаран* оператор.

(в) Сада треба проверити да ли је оператор $\hat{C}\, f(t) = f(t^n)$, који пресликава векторски простор $\mathbb{P}^n$ у векторски простор $\mathbb{P}^{2n}$, линеаран

$$\begin{aligned}\hat{C}\big(\alpha\, o_1(t) + \beta\, o_2(t)\big) &= \hat{C}\big(\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)\big) = \hat{C}\, f_e(t) \stackrel{\mathrm{d}}{=} f_e(t^n) = \alpha\, f_1(t^n) + \beta\, f_2(t^n) \\ &= \alpha\, \hat{C}\, f_1(t) + \beta\, \hat{C}\, f_2(t) = \alpha\, l_1(t) + \beta\, l_2(t)\end{aligned}$$

Како задати оператор $\hat{C}$ пресликава линеарну комбинацију објеката у линеарну комбинацију ликова, он представља *линеаран* оператор.

(г) Опет, треба проверити да ли је оператор $\hat{D}\, f(t) = \mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t$, који пресликава векторски простор $\mathbb{P}^n$ у векторски простор $\mathbb{P}^n$, линеаран

$$\hat{D}\big(\alpha\, o_1(t)+\beta\, o_2(t)\big)=\hat{D}\big(\alpha\, f_1(t)+\beta\, f_2(t)\big)=\hat{D}\; f_e(t)\stackrel{\mathrm{d}}{=}\frac{\mathrm{d}f_e(t^n)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\alpha\, f_1(t)+\beta\, f_2(t)\big]$$

$$=\alpha\,\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}+\beta\,\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha\,\hat{D}f_1(t)+\beta\,\hat{D}f_2(t)=\alpha\, l_1(t)+\beta\, l_2(t)$$

Како задати оператор $\hat{D}$ пресликава линеарну комбинацију објеката у линеарну комбинацију ликова, он представља *линеаран* оператор.

(5.4) Показати да се сваки линеарни оператор из $\mathbb{L}(\mathbb{F}^3,\mathbb{F}^3)$ може задати као

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3,\, a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+a_{23}\xi_3,\, a_{31}\xi_1+a_{32}\xi_2+a_{33}\xi_3)$$

као и да је матрица овог оператора у апсолутном базису управо $\left[a_{ij}\right]$.

Задати оператор пресликава вектор-објекат (дат као уређена тројка произвољних скалара) у вектор-лик (такође дат као уређена тројка произвољних скалара), што значи да се може писати: $\hat{A}\colon \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$.

Да би поменути вектор био линеаран, он мора пресликавати линеарну комбинацију објеката у линеарну комбинацију ликова

$$\begin{aligned}
\hat{A}\big(\alpha|o_1\rangle+\beta|o_2\rangle\big)&=\hat{A}\big(\alpha(\mu_1,\mu_2,\mu_3)+\beta(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\big)=\hat{A}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1,\alpha\mu_2+\beta\eta_2,\alpha\mu_3+\beta\eta_3)\\
&=\begin{pmatrix} a_{11}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1)+a_{12}(\alpha\mu_2+\beta\eta_2)+a_{13}(\alpha\mu_3+\beta\eta_3),\\ a_{21}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1)+a_{22}(\alpha\mu_2+\beta\eta_2)+a_{23}(\alpha\mu_3+\beta\eta_3),\\ a_{31}(\alpha\mu_1+\beta\eta_1)+a_{32}(\alpha\mu_2+\beta\eta_2)+a_{33}(\alpha\mu_3+\beta\eta_3) \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} \alpha(a_{11}\mu_1+a_{12}\mu_2+a_{13}\mu_3)+\beta(a_{11}\eta_1+a_{12}\eta_2+a_{13}\eta_3),\\ \alpha(a_{21}\mu_1+a_{22}\mu_2+a_{23}\mu_3)+\beta(a_{21}\eta_1+a_{22}\eta_2+a_{23}\eta_3),\\ \alpha(a_{31}\mu_1+a_{32}\mu_2+a_{33}\mu_3)+\beta(a_{31}\eta_1+a_{32}\eta_2+a_{33}\eta_3) \end{pmatrix}\\
&=\big(\alpha(a_{11}\mu_1+a_{12}\mu_2+a_{13}\mu_3),\alpha(a_{21}\mu_1+a_{22}\mu_2+a_{23}\mu_3),\alpha(a_{31}\mu_1+a_{32}\mu_2+a_{33}\mu_3)\big)\\
&\quad+\big(\beta(a_{11}\eta_1+a_{12}\eta_2+a_{13}\eta_3),\beta(a_{21}\eta_1+a_{22}\eta_2+a_{23}\eta_3),\beta(a_{31}\eta_1+a_{32}\eta_2+a_{33}\eta_3)\big)\\
&=\alpha(a_{11}\mu_1+a_{12}\mu_2+a_{13}\mu_3,a_{21}\mu_1+a_{22}\mu_2+a_{23}\mu_3,a_{31}\mu_1+a_{32}\mu_2+a_{33}\mu_3)\\
&\quad+\beta(a_{11}\eta_1+a_{12}\eta_2+a_{13}\eta_3,a_{21}\eta_1+a_{22}\eta_2+a_{23}\eta_3,a_{31}\eta_1+a_{32}\eta_2+a_{33}\eta_3)\\
&=\alpha\hat{A}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)+\beta\hat{A}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\\
&=\alpha\hat{A}|o_1\rangle+\beta\hat{A}|o_2\rangle=\alpha|l_1\rangle+\beta|l_2\rangle
\end{aligned}$$

што очигледно и чини.

Да би се добила матрица задатог оператора у апсолутном базису, треба применити његову дефинициону формулу на векторе апсолутног базиса $\{|\mathrm{e}_1\rangle=(1,0,0),|\mathrm{e}_2\rangle=(0,1,0),|\mathrm{e}_3\rangle=(0,0,1)\}$, на следећи начин

$$\begin{cases}
\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle=\hat{A}(1,0,0)=(a_{11}1+a_{12}0+a_{13}0,\, a_{21}1+a_{22}0+a_{23}0,\, a_{31}1+a_{32}0+a_{33}0)=(a_{11},a_{21},a_{31})\\
\qquad\quad =a_{11}(1,0,0)+a_{21}(0,1,0)+a_{31}(0,0,1)=a_{11}|\mathrm{e}_1\rangle+a_{21}|\mathrm{e}_2\rangle+a_{31}|\mathrm{e}_3\rangle\\
\hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle=\hat{A}(0,1,0)=(a_{11}0+a_{12}1+a_{13}0,\, a_{21}0+a_{22}1+a_{23}0,\, a_{31}0+a_{32}1+a_{33}0)=(a_{12},a_{22},a_{32})\\
\qquad\quad =a_{12}(1,0,0)+a_{22}(0,1,0)+a_{32}(0,0,1)=a_{12}|\mathrm{e}_1\rangle+a_{22}|\mathrm{e}_2\rangle+a_{32}|\mathrm{e}_3\rangle\\
\hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle=\hat{A}(0,0,1)=(a_{11}0+a_{12}0+a_{13}1,\, a_{21}0+a_{22}0+a_{23}1,\, a_{31}0+a_{32}0+a_{33}1)=(a_{13},a_{23},a_{33})\\
\qquad\quad =a_{13}(1,0,0)+a_{23}(0,1,0)+a_{33}(0,0,1)=a_{13}|\mathrm{e}_1\rangle+a_{23}|\mathrm{e}_2\rangle+a_{33}|\mathrm{e}_3\rangle
\end{cases}$$

чиме се добијају три основне формуле репрезентовања, у којима се *ликови* ортова апсолутног базиса пишу као *линеарне комбинације* ортова апсолутног базиса

$$\begin{cases} \hat{A}|e_1\rangle = a_{11}|e_1\rangle + a_{21}|e_2\rangle + a_{31}|e_3\rangle \\ \hat{A}|e_2\rangle = a_{12}|e_1\rangle + a_{22}|e_2\rangle + a_{32}|e_3\rangle \\ \hat{A}|e_3\rangle = a_{13}|e_1\rangle + a_{23}|e_2\rangle + a_{33}|e_3\rangle \end{cases}$$

Сада се коефицијенти уз први орт $|e_1\rangle$ пишу у прву врсту тражене матрице, коефицијенти уз други орт $|e_2\rangle$ у другу врсту, а коефицијенти уз трећи орт $|e_3\rangle$ у трећу врсту, чиме се добија матрица

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} |e_1\rangle \\ |e_2\rangle \\ |e_3\rangle \end{array} \end{array}$$

којом се представља оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису.

(5.5) Одредити матрице следећих оператора из $\mathbb{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3\right)$

(а) $\hat{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2\xi_1 - \xi_2,\, \xi_2 + \xi_3,\, \xi_1)$;

(б) $\hat{B}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_2 + \xi_3,\, 2\xi_1 + \xi_3,\, 3\xi_1 - \xi_2 + \xi_3)$;

(в) $\hat{C}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3,\, \xi_3,\, \xi_2)$.

Да би се одредиле матрице задатих оператора у апсолутном базису, њихова дефинициона формула се примени на три вектора апсолутног базиса $|\mathrm{e}_1\rangle = (1,0,0)$, $|\mathrm{e}_2\rangle = (0,1,0)$, $|\mathrm{e}_3\rangle = (0,0,1)$ на следећи начин

(а)

$$\begin{cases} \hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle = \hat{A}(1,0,0) = (2\cdot 1 - 0,\, 0+0,\, 1) = (2,0,1) \\ \qquad = 2\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1) = 2|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle + 1|\mathrm{e}_3\rangle \\ \hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle = \hat{A}(0,1,0) = (2\cdot 0 - 1,\, 1+0,\, 0) = (-1,1,0) \\ \qquad = (-1)\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1) = -1|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle \\ \hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle = \hat{A}(0,0,1) = (2\cdot 0 - 0,\, 0+1,\, 0) = (0,1,0) \\ \qquad = 0\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1) = 0|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle \end{cases}$$

Наравно, коефицијенти уз први орт $|\mathrm{e}_1\rangle$ пишу се у прву колону тражене матрице, коефицијенти уз други орт $|\mathrm{e}_2\rangle$ у другу колону, а коефицијенти уз трећи орт $|\mathrm{e}_3\rangle$ у трећу колону, чиме се добија матрица

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

која представља дати оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису.

(б)

$$\begin{cases} \hat{B}|\mathrm{e}_1\rangle = \hat{B}(1,0,0) = (0+0,\, 2\cdot 1+0,\, 3\cdot 1 - 0 + 0) = (0,2,3) = 0|\mathrm{e}_1\rangle + 2|\mathrm{e}_2\rangle + 3|\mathrm{e}_3\rangle \\ \hat{B}|\mathrm{e}_2\rangle = \hat{B}(0,1,0) = (1+0,\, 2\cdot 0+0,\, 3\cdot 0 - 1 + 0) = (1,0,-1) = 1|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle + (-1)|\mathrm{e}_3\rangle \\ \hat{B}|\mathrm{e}_3\rangle = \hat{B}(0,0,1) = (0+1,\, 2\cdot 0+1,\, 3\cdot 0 - 0 + 1) = (1,1,1) = 1|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + 1|\mathrm{e}_3\rangle \end{cases}$$

Након уписивања коефицијената у одговарајућа места у тражену матрицу, добија се

$$\left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

која представља задати оператор $\hat{B}$ у апсолутном базису.

(в)

$$\begin{cases} \hat{C}|\mathrm{e}_1\rangle = \hat{C}(1,0,0) = (1-0+0,\ 0,\ 0) = (1,\ 0,0) = 1|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle \\ \hat{C}|\mathrm{e}_2\rangle = \hat{C}(0,1,0) = (0-1+0,\ 0,\ 1) = (-1,0,1) = -1|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle + 1|\mathrm{e}_3\rangle \\ \hat{C}|\mathrm{e}_3\rangle = \hat{C}(0,0,1) = (0-0+1,\ 1,\ 0) = (1,1,0) = 1|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle \end{cases}$$

Када се у тражену матрицу поређају горњи коефицијенти у одговарајућа места, добија се

$$\left[\hat{C}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

што је матрица која представља задати оператор $\hat{C}$ у апсолутном базису.

(5.6) Одредити матрице оператора $\hat{A}$ из $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, за који важи да је $\hat{A}|v_i\rangle = |\tilde{v}_i\rangle$, $(i=1,2,3)$

(а) $\begin{matrix} |v_1\rangle=(0,0,1) & |\tilde{v}_1\rangle=(2,3,5) \\ |v_2\rangle=(0,1,1) \;, & |\tilde{v}_2\rangle=(1,0,0) \\ |v_3\rangle=(1,1,1) & |\tilde{v}_3\rangle=(0,1,-1) \end{matrix}$;

(б) $\begin{matrix} |v_1\rangle=(2,3,5) & |\tilde{v}_1\rangle=(1,1,1) \\ |v_2\rangle=(0,1,2) \;, & |\tilde{v}_2\rangle=(1,1,-1) \\ |v_3\rangle=(1,0,0) & |\tilde{v}_3\rangle=(2,1,2) \end{matrix}$;

(в) $\begin{matrix} |v_1\rangle=(2,0,3) & |\tilde{v}_1\rangle=(1,2,-1) \\ |v_2\rangle=(4,1,5) \;, & |\tilde{v}_2\rangle=(4,5,-2) \\ |v_3\rangle=(3,1,2) & |\tilde{v}_3\rangle=(1,-1,1) \end{matrix}$.

Базиси у којима су дати вектори представљени су $\{|e_1\rangle,|e_2\rangle,|e_3\rangle\}$ и $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\}$.

(а) На задате векторе

$$\begin{matrix} |v_1\rangle=(0,0,1) & |\tilde{v}_1\rangle=(2,3,5) \\ |v_2\rangle=(0,1,1) \;, & |\tilde{v}_2\rangle=(1,0,0) \\ |v_3\rangle=(1,1,1) & |\tilde{v}_3\rangle=(0,1,-1) \end{matrix}$$

треба применити дату формулу $\hat{A}|v_i\rangle = |\tilde{v}_i\rangle$, $(i=1,2,3)$, на следећи начин

$$\hat{A}|v_1\rangle=|\tilde{v}_1\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{cases} a_{13}=2 \\ a_{23}=3 \\ a_{33}=5 \end{cases}}$$

$$\hat{A}|v_2\rangle=|\tilde{v}_2\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 2 \\ a_{21} & a_{22} & 3 \\ a_{31} & a_{32} & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{12}+2 \\ a_{22}+3 \\ a_{32}+5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{cases} a_{12}+2=1 \\ a_{22}+3=0 \\ a_{32}+5=0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a_{12}=-1 \\ a_{22}=-3 \\ a_{32}=-5 \end{cases}}$$

$$\hat{A}|v_3\rangle=|\tilde{v}_3\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & -1 & 2 \\ a_{21} & -3 & 3 \\ a_{31} & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}-1+2 \\ a_{21}-3+3 \\ a_{31}-5+5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\begin{cases} a_{11}+1=0 \\ a_{21}=1 \\ a_{31}=-1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a_{11}=-1 \\ a_{21}=1 \\ a_{31}=-1 \end{cases}}$$

Како су добијени сви матрични елементи, може се написати следећа матрица

$$\mathscr{A}=\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Иначе, овако добијена матрица јесте управо она којом се представља оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису, што је лако проверљиво

$$\mathscr{A}\,\mathrm{e}_1 = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|\mathrm{e}_1\rangle = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + (-1)|\mathrm{e}_3\rangle$$

$$\mathscr{A}\,\mathrm{e}_2 = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|\mathrm{e}_2\rangle = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-5)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)|\mathrm{e}_1\rangle + (-3)|\mathrm{e}_2\rangle + (-5)|\mathrm{e}_3\rangle$$

$$\mathscr{A}\,\mathrm{e}_3 = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|\mathrm{e}_3\rangle = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2|\mathrm{e}_1\rangle + 3|\mathrm{e}_2\rangle + 5|\mathrm{e}_3\rangle$$

Сада треба добити елементе матрице којом се представља оператор $\hat{A}$ у првом задатом базису. Прво се матрицом $\mathscr{A}$ делује на први вектор поменутог базиса

$$\mathscr{A}\,v_1 = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_1\rangle = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 2|\mathrm{e}_1\rangle + 3|\mathrm{e}_2\rangle + 5|\mathrm{e}_3\rangle\,,$$

а потом се тако добијени лик напише као линеарна комбинација вектора првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\,v_1 = \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle + \gamma|v_3\rangle\,,$$

при чему, наравно, треба одредити коефицијенте линеарне комбинације, изједначавањем десних страна горња два израза

$$2|\mathrm{e}_1\rangle + 3|\mathrm{e}_2\rangle + 5|\mathrm{e}_3\rangle = \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle + \gamma|v_3\rangle$$

$$\Leftrightarrow\ 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma \end{bmatrix}$$

Изједначавањем одговарајућих матричних елемената леве и десне матрице, добија се систем који се лако решава

$$\begin{cases} \gamma = 2 \\ \beta+\gamma = 3 \\ \alpha+\beta+\gamma = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \beta = 3-\gamma \\ \alpha+\beta = 5-\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \beta = 3-2 \\ \alpha+\beta = 5-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \beta = 1 \\ \alpha+\beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \beta = 1 \\ \alpha+1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

те је онда

$$\mathscr{A}\, v_1 = 2\left|v_1\right\rangle + 1\left|v_2\right\rangle + 2\left|v_3\right\rangle .$$

Друго, матрицом $\mathscr{A}$ делује се на други вектор првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_2 = \left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}} \left|v_2\right\rangle = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 \\ -3+3 \\ -5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\left|e_1\right\rangle + 0\left|e_2\right\rangle + 0\left|e_3\right\rangle ,$$

опет се тако добијени лик напише као линеарна комбинација вектора првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_2 = \delta\left|v_1\right\rangle + \varepsilon\left|v_2\right\rangle + \phi\left|v_3\right\rangle ,$$

а коефицијенти линеарне комбинације се одређују изједначавањем десних страна горња два израза

$$\begin{gathered} 1\left|e_1\right\rangle + 0\left|e_2\right\rangle + 0\left|e_3\right\rangle = \delta\left|v_1\right\rangle + \varepsilon\left|v_2\right\rangle + \phi\left|v_3\right\rangle \\ \Leftrightarrow\ 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \varepsilon\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \phi\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \varepsilon + \phi \\ \delta + \varepsilon + \phi \end{bmatrix} \end{gathered}$$

Изједначавањем одговарајућих матричних елемената матрице слева и матрице здесна, добија се систем који није тешко решити

$$\underline{\begin{cases} \phi = 1 \\ \varepsilon + \phi = 0 \\ \delta + \varepsilon + \phi = 0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \color{red}{\phi = 1} \\ \varepsilon = \color{red}{-\phi} \\ \delta + \varepsilon = \color{red}{-\phi} \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} \phi = 1 \\ \color{blue}{\varepsilon = -1} \\ \delta + \color{blue}{\varepsilon} = -1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \phi = 1 \\ \varepsilon = -1 \\ \delta - 1 = -1 \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} \phi = 1 \\ \varepsilon = -1 \\ \delta = 1 - 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \phi = 1 \\ \varepsilon = -1 \\ \delta = 0 \end{cases}}$$

па ће бити

$$\mathscr{A}\, v_2 = 0\left|v_1\right\rangle + (-1)\left|v_2\right\rangle + 1\left|v_3\right\rangle .$$

Треће, матрицом $\mathscr{A}$ делује се на трећи вектор првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_3 = \left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}} \left|v_3\right\rangle = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-1+2 \\ 1-3+3 \\ -1-5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\left|e_1\right\rangle + 1\left|e_2\right\rangle + (-1)\left|e_3\right\rangle ,$$

тако добијени лик напише се (поново!) као линеарна комбинација вектора првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_3 = \mu\left|v_1\right\rangle + \eta\left|v_2\right\rangle + \chi\left|v_3\right\rangle ,$$

а коефицијенти линеарне комбинације одређују се изједначавањем десних страна горња два израза

$$0|e_1\rangle+1|e_2\rangle+(-1)|e_3\rangle=\mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\chi|v_3\rangle$$

$$\Leftrightarrow\ 0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\eta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\chi\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\chi\\\eta+\chi\\\mu+\eta+\chi\end{bmatrix}$$

Изједначавањем одговарајућих матричних елемената матрица с леве и десне стране, добија се систем лак за решавање

$$\begin{cases}\chi=0\\\eta+\chi=1\\\mu+\eta+\chi=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=0\\\eta+\chi=1\\\mu+\eta+\chi=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\chi=0\\\eta=1\\\mu+\eta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=0\\\eta=1\\\mu+1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\chi=0\\\eta=1\\\mu=-2\end{cases}$$

одакле је

$$\mathscr{A}\,v_3=(-2)|v_1\rangle+1|v_2\rangle+0|v_3\rangle\,.$$

Ако се добијени изрази за ликове поређају један испод другог

$$\mathscr{A}\,v_1=2|v_1\rangle+1|v_2\rangle+2|v_3\rangle$$

$$\mathscr{A}\,v_2=0|v_1\rangle+(-1)|v_2\rangle+1|v_3\rangle$$

$$\mathscr{A}\,v_3=(-2)|v_1\rangle+1|v_2\rangle+0|v_3\rangle$$

није тешко написати матрицу којом се представља оператор $\hat{A}$ у првом задатом базису

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}|v_1\rangle\\|v_2\rangle\\|v_3\rangle\end{array}.$$

Напомена: из горњег поступка јасно је да се један исти оператор представља са две различите матрице у два различита базиса

$$\mathscr{A}=\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\1&-3&3\\-1&-5&5\end{bmatrix}\quad\text{и}\quad\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{bmatrix}.$$

Занимљиво је да је траг (збир матричних елемената на главној дијагонали) прве матрице једнак трагу друге матрице, 1; уствари, траг матрице којом се представља оператор карактеристика је тог оператора, будући да се не мења његовим представљањем у различитим базисима.

(б) На задате векторе

$$\begin{aligned}|v_1\rangle&=(2,3,5)\quad &|\tilde{v}_1\rangle&=(1,1,1)\\|v_2\rangle&=(0,1,2)\,,\quad &|\tilde{v}_2\rangle&=(1,1,-1)\\|v_3\rangle&=(1,0,0)\quad &|\tilde{v}_3\rangle&=(2,1,2)\end{aligned}$$

треба применити дату формулу $\hat{A}|v_i\rangle = |\tilde{v}_i\rangle$, $(i=1,2,3)$, на следећи начин

$$\hat{A}|v_3\rangle = |\tilde{v}_3\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{31} = 2 \end{cases}$$

$$\hat{A}|v_2\rangle = |\tilde{v}_2\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 2 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{12}+2a_{13} \\ a_{22}+2a_{23} \\ a_{32}+2a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{12}+2a_{13} = 1 \\ a_{22}+2a_{23} = 1 \\ a_{32}+2a_{33} = -1 \end{cases}$$

$$\hat{A}|v_1\rangle = |\tilde{v}_1\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 2 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\cdot 2+3a_{12}+5a_{13} \\ 1\cdot 2+3a_{22}+5a_{23} \\ 2\cdot 2+3a_{32}+5a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+3a_{12}+5a_{13} = 1 \\ 2+3a_{22}+5a_{23} = 1 \\ 4+3a_{32}+5a_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_{12}+5a_{13} = -3 \\ 3a_{22}+5a_{23} = -1 \\ 3a_{32}+5a_{33} = -3 \end{cases}$$

Непознатих шест матричних елемената добија се из парова једначина које их садрже

$$\begin{cases} a_{12}+2a_{13} = 1 \\ 3a_{12}+5a_{13} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = 1-2a_{13} \\ 3a_{12}+5a_{13} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 1-2a_{13} \\ 3-6a_{13}+5a_{13} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = 1-2a_{13} \\ a_{13} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = -11 \\ a_{13} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{22}+2a_{23} = 1 \\ 3a_{22}+5a_{23} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{22} = 1-2a_{23} \\ 3a_{22}+5a_{23} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{22} = 1-2a_{23} \\ 3-6a_{23}+5a_{23} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{22} = 1-2a_{23} \\ a_{23} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{22} = -7 \\ a_{23} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{32}+2a_{33} = -1 \\ 3a_{32}+5a_{33} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{32} = -1-2a_{33} \\ 3a_{32}+5a_{33} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{32} = -1-2a_{33} \\ -3-6a_{33}+5a_{33} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{32} = -1-2a_{33} \\ a_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{32} = -1 \\ a_{33} = 0 \end{cases}$$

Како су напокон добијени сви матрични елементи, може се записати матрица која представља оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису

$$\mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сада треба добити елементе матрице којом се представља оператор $\hat{A}$ у првом задатом базису. Прво се матрицом $\mathscr{A}$ делује на први вектор поменутог базиса

$$\mathscr{A}\, v_1 = \left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}} |v_1\rangle = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2-11\cdot 3+6\cdot 5 \\ 1\cdot 2-7\cdot 3+4\cdot 5 \\ 2\cdot 2-1\cdot 3+0\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1|e_1\rangle + 1|e_2\rangle + 1|e_3\rangle,$$

а потом се тако добијени лик запише као линеарна комбинација вектора првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_1 = \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle + \gamma|v_3\rangle,$$

при чему, наравно, треба одредити коефицијенте линеарне комбинације, изједначавањем десних страна горња два израза

$$1|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + 1|\mathrm{e}_3\rangle = \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle + \gamma|v_3\rangle,$$

илити

$$1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha+\gamma\\3\alpha+\beta\\5\alpha+2\beta\end{bmatrix}.$$

Изједначавањем одговарајућих матричних елемената леве и десне матрице, добија се систем чија су решења

$$\underline{\begin{cases}2\alpha+\gamma=1\\3\alpha+\beta=1\\5\alpha+2\beta=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\gamma=1-2\alpha\\\beta=1-3\alpha\\5\alpha+2\beta=1\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\gamma=1-2\alpha\\\beta=1-3\alpha\\5\alpha+2-6\alpha=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\gamma=1-2\alpha\\\beta=1-3\alpha\\\alpha=1\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\gamma=-1\\\beta=-2\\\alpha=1\end{cases}}$$

што значи да је

$$\mathscr{A}\, v_1 = 1|v_1\rangle + (-2)|v_2\rangle + (-1)|v_3\rangle.$$

Друго, матрицом $\mathscr{A}$ делује се на други вектор првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_2 = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}|v_2\rangle = \begin{bmatrix}2&-11&6\\1&-7&4\\2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11\cdot1+6\cdot2\\-7\cdot1+4\cdot2\\-1\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=1|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle+(-1)|\mathrm{e}_3\rangle,$$

опет се тако добијени лик напише као линеарна комбинација вектора првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_2 = \delta|v_1\rangle + \varepsilon|v_2\rangle + \phi|v_3\rangle,$$

а коефицијенти линеарне комбинације се одређују изједначавањем десних страна горња два израза

$$1|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + (-1)|\mathrm{e}_3\rangle = \delta|v_1\rangle + \varepsilon|v_2\rangle + \phi|v_3\rangle$$

$$\Leftrightarrow 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\delta\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+\phi\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\delta+\phi\\3\delta+\varepsilon\\5\delta+2\varepsilon\end{bmatrix}$$

Изједначавањем одговарајућих матричних елемената матрице слева и матрице здесна, добија се систем који није тешко решити

$$\underline{\begin{cases}2\delta+\phi=1\\3\delta+\varepsilon=1\\5\delta+2\varepsilon=-1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\phi=1-2\delta\\\varepsilon=1-3\delta\\5\delta+2\varepsilon=-1\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\phi=1-2\delta\\\varepsilon=1-3\delta\\5\delta+2-6\delta=-1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\phi=1-2\delta\\\varepsilon=1-3\delta\\\delta=3\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\phi=-5\\\varepsilon=-8\\\delta=3\end{cases}}$$

те је онда

$$\mathscr{A}\, v_2 = 3|v_1\rangle + (-8)|v_2\rangle + (-5)|v_3\rangle.$$

Треће, матрицом $\mathscr{A}$ делује се на трећи вектор првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_3 = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} |v_3\rangle = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + 2|\mathrm{e}_3\rangle,$$

тако добијени лик напише се (поново!) као линеарна комбинација вектора првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_3 = \mu|v_1\rangle + \eta|v_2\rangle + \chi|v_3\rangle,$$

а коефицијенти линеарне комбинације одређују се изједначавањем десних страна горња два израза

$$2|\mathrm{e}_1\rangle + 1|\mathrm{e}_2\rangle + 2|\mathrm{e}_3\rangle = \mu|v_1\rangle + \eta|v_2\rangle + \chi|v_3\rangle$$

$$\Leftrightarrow\ 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \eta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \chi\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \chi \\ 3\mu + \eta \\ 5\mu + 2\eta \end{bmatrix}$$

Изједначавањем одговарајућих матричних елемената матрица с леве и десне стране, добија се систем лак за решавање

$$\begin{cases} 2\mu + \chi = 2 \\ 3\mu + \eta = 1 \\ 5\mu + 2\eta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2 - 2\mu \\ \eta = 1 - 3\mu \\ 5\mu + 2\eta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \chi = 2 - 2\mu \\ \eta = 1 - 3\mu \\ 5\mu + 2 - 6\mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2 - 2\mu \\ \eta = 1 - 3\mu \\ \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \chi = 2 \\ \eta = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

одакле је

$$\mathscr{A}\, v_3 = 0|v_1\rangle + 1|v_2\rangle + 2|v_3\rangle.$$

Ако се добијени изрази за ликове поређају један испод другог

$$\mathscr{A}\, v_1 = 1|v_1\rangle + (-2)|v_2\rangle + (-1)|v_3\rangle$$

$$\mathscr{A}\, v_2 = 3|v_1\rangle + (-8)|v_2\rangle + (-5)|v_3\rangle$$

$$\mathscr{A}\, v_3 = 0|v_1\rangle + 1|v_2\rangle + 2|v_3\rangle$$

није тешко написати матрицу којом се представља оператор $\hat{A}$ у првом задатом базису

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} |v_1\rangle \\ |v_2\rangle \\ |v_3\rangle \end{array}.$$

Напомена: из горњег поступка јасно је да се један исти оператор представља са две различите матрице у два различита базиса

$$\mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Занимљиво је да је траг (збир матричних елемената на главној дијагонали) прве матрице једнак трагу друге матрице, -5; са предавања је познато да је траг матрице којом се представља оператор карактеристика тог оператора, будући да се не мења његовим представљањем у различитим базисима.

(в) На задате векторе

$$|v_1\rangle=(2,0,3)\quad |\tilde{v}_1\rangle=(1,2,-1)$$
$$|v_2\rangle=(4,1,5)\ ,\ |\tilde{v}_2\rangle=(4,5,-2)$$
$$|v_3\rangle=(3,1,2)\quad |\tilde{v}_3\rangle=(1,-1,1)$$

примењује се дата формула $\hat{A}|v_i\rangle=|\tilde{v}_i\rangle$, $(i=1,2,3)$, на следећи начин

$$\hat{A}|v_1\rangle=|\tilde{v}_1\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2a_{11}+3a_{13}\\2a_{21}+3a_{23}\\2a_{31}+3a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2a_{11}+3a_{13}=1\\2a_{21}+3a_{23}=2\\2a_{31}+3a_{33}=-1\end{cases}$$

$$\hat{A}|v_2\rangle=|\tilde{v}_2\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\-2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}4a_{11}+a_{12}+5a_{13}\\4a_{21}+a_{22}+5a_{23}\\4a_{31}+a_{32}+5a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\-2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}4a_{11}+a_{12}+5a_{13}=4\\4a_{21}+a_{22}+5a_{23}=5\\4a_{31}+a_{32}+5a_{33}=-2\end{cases}$$

$$\hat{A}|v_3\rangle=|\tilde{v}_3\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}3a_{11}+a_{12}+2a_{13}\\3a_{21}+a_{22}+2a_{23}\\3a_{31}+a_{32}+2a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3a_{11}+a_{12}+2a_{13}=1\\3a_{21}+a_{22}+2a_{23}=-1\\3a_{31}+a_{32}+2a_{33}=1\end{cases}$$

Непознатих девет матричних елемената добија се из тројки једначина које их садрже

$$\begin{cases}2a_{11}+3a_{13}=1\\4a_{11}+a_{12}+5a_{13}=4\\3a_{11}+a_{12}+2a_{13}=1\ /\cdot(-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a_{11}+3a_{13}=1\\4a_{11}+a_{12}+5a_{13}=4\\-3a_{11}-a_{12}-2a_{13}=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a_{11}+3a_{13}=1\\4a_{11}+a_{12}+5a_{13}=4\\a_{11}+3a_{13}=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a_{11}+3a_{13}=1\\4a_{11}+a_{12}+5a_{13}=4\\a_{11}=3-3a_{13}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6-6a_{13}+3a_{13}=1\\4a_{11}+a_{12}+5a_{13}=4\\a_{11}=3-3a_{13}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_{13}=5/3\\4a_{11}+a_{12}+5a_{13}=4\\a_{11}=3-3a_{13}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_{13}=5/3\\4a_{11}+a_{12}+5a_{13}=4\\a_{11}=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a_{13}=5/3\\-8+a_{12}+25/3=4\\a_{11}=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_{13}=5/3\\-24/3+a_{12}+25/3=12/3\\a_{11}=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_{13}=5/3\\a_{12}=11/3\\a_{11}=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a_{21}+3a_{23}=2\\4a_{21}+a_{22}+5a_{23}=5\\3a_{21}+a_{22}+2a_{23}=-1\ /\cdot(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a_{21}+3a_{23}=2\\4a_{21}+a_{22}+5a_{23}=5\\-3a_{21}-a_{22}-2a_{23}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a_{21}+3a_{23}=2\\4a_{21}+a_{22}+5a_{23}=5\\a_{21}+3a_{23}=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a_{21}+3a_{23}=2\\4a_{21}+a_{22}+5a_{23}=5\\a_{21}=6-3a_{23}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12-6a_{23}+3a_{23}=2\\4a_{21}+a_{22}+5a_{23}=5\\a_{21}=6-3a_{23}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{23}=10/3\\4a_{21}+a_{22}+5a_{23}=5\\a_{21}=6-3a_{23}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_{23}=10/3\\4a_{21}+a_{22}+5a_{23}=5\\a_{21}=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{23}=10/3\\-16+a_{22}+50/3=5\\a_{21}=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{23}=10/3\\-48/3+a_{22}+50/3=15/3\\a_{21}=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{23}=10/3\\a_{22}=13/3\\a_{21}=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a_{31}+3a_{33}=-1\\4a_{31}+a_{32}+5a_{33}=-2\\3a_{31}+a_{32}+2a_{33}=1\ /\cdot(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a_{31}+3a_{33}=-1\\4a_{31}+a_{32}+5a_{33}=-2\\-3a_{31}-a_{32}-2a_{33}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a_{31}+3a_{33}=-1\\4a_{31}+a_{32}+5a_{33}=-2\\a_{31}+3a_{33}=-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a_{31}+3a_{33}=-1\\4a_{31}+a_{32}+5a_{33}=-2\\a_{31}=-3-3a_{33}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6-6a_{33}+3a_{33}=-1\\4a_{31}+a_{32}+5a_{33}=-2\\a_{31}=-3-3a_{33}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{33}=-5/3\\4a_{31}+a_{32}+5a_{33}=-2\\a_{31}=-3-3a_{33}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_{33}=-5/3\\4a_{31}+a_{32}+5a_{33}=-2\\a_{31}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{33}=-5/3\\4a_{31}+a_{32}+5a_{33}=-2\\a_{31}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{33}=-5/3\\a_{32}=-5/3\\a_{31}=2\end{cases}$$

Како су напокон добијени сви матрични елементи, може се записати матрица која представља оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису

$$\mathscr{A}=\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}-2&11/3&5/3\\-4&13/3&10/3\\2&-5/3&-5/3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6&11&5\\-12&13&10\\6&-5&-5\end{bmatrix}.$$

Сада треба добити елементе матрице којом се представља оператор $\hat{A}$ у првом задатом базису. Прво се матрицом $\mathscr{A}$ делује на први вектор поменутог базиса

$$\mathscr{A}v_1=\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}|v_1\rangle=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6&11&5\\-12&13&10\\6&-5&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6\cdot2+5\cdot3\\-12\cdot2+10\cdot3\\6\cdot2+(-5)\cdot3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\6\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=1|e_1\rangle+2|e_2\rangle+(-1)|e_3\rangle$$

а потом се тако добијени лик запише као линеарна комбинација вектора првог задатог базиса

$$\mathscr{A}v_1=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle,$$

при чему, наравно, треба одредити коефицијенте линеарне комбинације, изједначавањем десних страна горња два израза

$$1|e_1\rangle+2|e_2\rangle+(-1)|e_3\rangle=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle$$
$$\Leftrightarrow\ 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha+4\beta+3\gamma\\\beta+\gamma\\3\alpha+5\beta+2\gamma\end{bmatrix}$$

Изједначавањем одговарајућих матричних елемената леве и десне матрице, добија се систем чија су решења

$$\begin{cases}2\alpha+4\beta+3\gamma=1\\\beta+\gamma=2\\3\alpha+5\beta+2\gamma=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+4\beta+3\gamma=1\\\beta=2-\gamma\\3\alpha+5\beta+2\gamma=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+8-4\gamma+3\gamma=1\\\beta=2-\gamma\\3\alpha+10-5\gamma+2\gamma=-1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha-\gamma=-7\\\beta=2-\gamma\\3\alpha-3\gamma=-11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=2\alpha+7\\\beta=2-\gamma\\3\alpha-3\gamma=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=2\alpha+7\\\beta=-2\alpha-5\\\alpha=-10/3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=1/3\\\beta=5/3\\\alpha=-10/3\end{cases}$$

те је онда

$$\mathscr{A}v_1=-\frac{10}{3}|v_1\rangle+\frac{5}{3}|v_2\rangle+\frac{1}{3}|v_3\rangle\,.$$

Друго, матрицом $\mathscr{A}$ делује се на други вектор првог задатог базиса

$$\mathscr{A}v_2=\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}|v_2\rangle=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6&11&5\\-12&13&10\\6&-5&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6\cdot4+11\cdot1+5\cdot5\\-12\cdot4+13\cdot1+10\cdot5\\6\cdot4-5\cdot1-5\cdot5\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}12\\15\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\-2\end{bmatrix}=4|e_1\rangle+5|e_2\rangle+(-2)|e_3\rangle$$

опет се тако добијени лик напише као линеарна комбинација вектора првог задатог базиса

$$\mathscr{A}v_2=\delta|v_1\rangle+\varepsilon|v_2\rangle+\phi|v_3\rangle,$$

а коефицијенти линеарне комбинације се одређују изједначавањем десних страна горња два израза

$$4|e_1\rangle+5|e_2\rangle+(-2)|e_3\rangle=\delta|v_1\rangle+\varepsilon|v_2\rangle+\phi|v_3\rangle$$
$$\Leftrightarrow\ 4\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\delta\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix}+\phi\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}4\\5\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\delta+4\varepsilon+3\phi\\\varepsilon+\phi\\3\delta+5\varepsilon+2\phi\end{bmatrix}$$

Изједначавањем одговарајућих матричних елемената матрице слева и матрице здесна, добија се систем који није тешко решити

$$\begin{cases}2\delta+4\varepsilon+3\phi=4\\ \varepsilon+\phi=5\\ 3\delta+5\varepsilon+2\phi=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\delta+4\varepsilon+3\phi=4\\ \varepsilon=5-\phi\\ 3\delta+5\varepsilon+2\phi=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\delta+20-4\phi+3\phi=4\\ \varepsilon=5-\phi\\ 3\delta+25-5\phi+2\phi=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\delta=-16+\phi\\ \varepsilon=5-\phi\\ 3\delta-3\phi=-27\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\delta=-8+\phi/2\\ \varepsilon=5-\phi\\ \delta-\phi=-9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\delta=-8+\phi/2\\ \varepsilon=5-\phi\\ -8+\phi/2-\phi=-9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\delta=-8+\phi/2\\ \varepsilon=5-\phi\\ -\phi/2=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\delta=-8+\phi/2\\ \varepsilon=5-\phi\\ \phi=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\delta=-7\\ \varepsilon=3\\ \phi=2\end{cases}$$

те је онда

$$\mathscr{A}\, v_2=(-7)|v_1\rangle+3|v_2\rangle+2|v_3\rangle .$$

Треће, матрицом $\mathscr{A}$ делује се на трећи вектор првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_3=\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}|v_3\rangle=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6&11&5\\-12&13&10\\6&-5&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6\cdot3+11\cdot1+5\cdot2\\-12\cdot3+13\cdot1+10\cdot2\\6\cdot3-5\cdot1-5\cdot2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=1|e_1\rangle+(-1)|e_2\rangle+1|e_3\rangle$$

тако добијени лик напише се (поново!) као линеарна комбинација вектора првог задатог базиса

$$\mathscr{A}\, v_3=\mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\chi|v_3\rangle,$$

а коефицијенти линеарне комбинације одређују се изједначавањем десних страна горња два израза

$$1|e_1\rangle+(-1)|e_2\rangle+1|e_3\rangle=\mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\chi|v_3\rangle$$

$$\Leftrightarrow 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}+\eta\begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix}+\chi\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\mu+4\eta+3\chi\\ \eta+\chi\\ 3\mu+5\eta+2\chi\end{bmatrix}$$

Изједначавањем одговарајућих матричних елемената матрица с леве и десне стране, добија се систем лак за решавање

$$\begin{cases}2\mu+4\eta+3\chi=1\\ \eta+\chi=-1\\ 3\mu+5\eta+2\chi=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\mu+4\eta+3\chi=1\\ \eta=-1-\chi\\ 3\mu+5\eta+2\chi=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\mu-4-4\chi+3\chi=1\\ \eta=-1-\chi\\ 3\mu-5-5\chi+2\chi=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\mu-\chi=5\\ \eta=-1-\chi\\ 3\mu-3\chi=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\mu-\chi=5\\ \eta=-1-\chi\\ \mu=\chi+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\chi+4-\chi=5\\ \eta=-1-\chi\\ \mu=\chi+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=1\\ \eta=-1-\chi\\ \mu=\chi+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\chi=1\\ \eta=-2\\ \mu=3\end{cases}$$

одакле је

$$\mathscr{A}\, v_3=3|v_1\rangle+(-2)|v_2\rangle+1|v_3\rangle .$$

Ако се добијени изрази за ликове поређају један испод другог

$$\mathscr{A}\, v_1 = -\frac{10}{3}|v_1\rangle + \frac{5}{3}|v_2\rangle + \frac{1}{3}|v_3\rangle$$

$$\mathscr{A}\, v_2 = -7|v_1\rangle + 3|v_2\rangle + 2|v_3\rangle$$

$$\mathscr{A}\, v_3 = 3|v_1\rangle + (-2)|v_2\rangle + 1|v_3\rangle$$

није тешко написати матрицу којом се представља оператор $\hat{A}$ у првом задатом базису

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -10/3 & -7 & 3 \\ 5/3 & 3 & -2 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -10 & -21 & 9 \\ 5 & 9 & -6 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} |v_1\rangle \\ |v_2\rangle \\ |v_3\rangle \end{matrix}.$$

Напомена: из горњег поступка је очигледно да се један исти оператор представља са две различите матрице у два различита базиса

$$\mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -10 & -21 & 9 \\ 5 & 9 & -6 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Занимљиво је да је траг (збир матричних елемената на главној дијагонали) прве матрице једнак трагу друге матрице, $2/3$; са предавања је познато да је траг матрице којом се представља оператор карактеристика тог оператора, будући да се не мења његовим представљањем у различитим базисима.

(5.7) Одредити матрицу којом се представљају оператори $\hat{A}$ и $\hat{B}$ из $\mathbb{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, дати као

$$\text{(a)}\ \hat{A}(\xi_1,\xi_2)\stackrel{\text{d}}{=}(3\xi_1+\xi_2,2\xi_1)\quad \text{и}\quad \text{(б)}\ \hat{B}(\xi_1,\xi_2)\stackrel{\text{d}}{=}(\xi_1+2\xi_2,2\xi_1+\xi_2)$$

у следећа два базиса

- апсолутном базису: $\{|\mathrm{e}_1\rangle=(1,0),|\mathrm{e}_2\rangle=(0,1)\}$
- задатом базису: $\{|\mathrm{f}_1\rangle=(1,2),|\mathrm{f}_2\rangle=(3,4)\}$.

Проверити да ли $\forall|v\rangle\in\mathbb{R}^2$ важи да је $\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}[v]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\left[\hat{A}v\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$ и $\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}[v]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}=\left[\hat{A}v\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}$.

(а) Матрица којом се представља оператор $\hat{A}$ у апсолутном базису добија се деловањем тог оператора на векторе апсолутног базиса према $\hat{A}(\xi_1,\xi_2)\stackrel{\text{d}}{=}(3\xi_1+\xi_2,2\xi_1)$; тако добијене ликове треба, према основној формули репрезентовања, написати као линеарне комбинације вектора апсолутног базиса

$$\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle=\hat{A}(1,0)=(3\cdot1+0,2\cdot1)=(3,2)=3(1,0)+2(0,1)=3|\mathrm{e}_1\rangle+2|\mathrm{e}_2\rangle$$
$$\hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle=\hat{A}(0,1)=(3\cdot0+1,2\cdot0)=(1,0)=1(1,0)+0(0,1)=1|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle$$

а потом коефицијенте обе линеарне комбинације написати као матричне елементе тражене матрице којом се представља оператор у апсолутном базису

$$\mathscr{A}=\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}3&1\\2&0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}|\mathrm{e}_1\rangle\\|\mathrm{e}_2\rangle\end{array}.$$

Провером задатог израза се види да он важи за $\forall|v\rangle\in\mathbb{R}^2$

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}[v]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}3&1\\2&0\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}3\cdot\xi_1+1\cdot\xi_2\\2\cdot\xi_1+0\cdot\xi_2\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}3\xi_1+\xi_2\\2\xi_1\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$
$$=\left[(3\xi_1+\xi_2,2\xi_1)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\left[\hat{A}(\xi_1,\xi_2)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\left[\hat{A}v\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

Матрица којом се представља оператор $\hat{A}$ у задатом базису добија се деловањем тог оператора на векторе задатог базиса према формули $\hat{A}(\xi_1,\xi_2)\stackrel{\text{d}}{=}(3\xi_1+\xi_2,2\xi_1)$; тако добијене ликове треба, према основној формули репрезентовања, написати као линеарне комбинације НЕ вектора апсолутног базиса, већ као линеарне комбинације вектора задатог базиса

$$\hat{A}|\mathrm{f}_1\rangle=\hat{A}(1,2)=(3\cdot1+2,2\cdot1)=(5,2)=\alpha|\mathrm{f}_1\rangle+\beta|\mathrm{f}_2\rangle=\alpha(1,2)+\beta(3,4)=(\alpha+3\beta,2\alpha+4\beta)$$
$$\hat{A}|\mathrm{f}_2\rangle=\hat{A}(3,4)=(3\cdot3+4,2\cdot3)=(13,6)=\gamma|\mathrm{f}_1\rangle+\delta|\mathrm{f}_2\rangle=\gamma(1,2)+\delta(3,4)=(\gamma+3\beta,2\gamma+4\delta)$$

при чему, за разлику од претходног случаја, коефицијенте прве линеарне комбинације треба одредити из првог система једначина

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=5\\2\alpha+4\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+3\beta=5\\\alpha+2\beta=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+3\beta=5\\\alpha=1-2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2\beta+3\beta=5\\\alpha=1-2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=4\\\alpha=1-2\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=4\\\alpha=-7\end{cases}$$

а коефицијенте друге линеарне комбинације из другог система једначина

$$\begin{cases}\gamma+3\delta=13\\2\gamma+4\delta=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma+3\delta=13\\\gamma+2\delta=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma+3\delta=13\\\gamma=3-2\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-2\delta+3\delta=13\\\gamma=3-2\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=10\\\gamma=3-2\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\delta=10\\\gamma=-17\end{cases}$$

Овиме се добијају следећа два израза

$$\hat{A}|\mathrm{f}_1\rangle=-7|\mathrm{f}_1\rangle+4|\mathrm{f}_2\rangle$$

$$\hat{A}|\mathrm{f}_2\rangle=-17|\mathrm{f}_1\rangle+10|\mathrm{f}_2\rangle$$

чији се коефицијенти потом записују као елементи тражене матрице којом се представља оператор у датом базису

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}-7&-17\\4&10\end{bmatrix}\begin{matrix}|\mathrm{f}_1\rangle\\|\mathrm{f}_2\rangle\end{matrix}\ .$$

Да би се могао проверити израз

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}[v]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}=\left[\hat{A}v\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}$$

у задатом базису, мора се произвољни вектор $|v\rangle$ написати као линеарна комбинација ортова $|\mathrm{e}_1\rangle$ и $|\mathrm{e}_2\rangle$, као и вектора $|\mathrm{f}_1\rangle$ и $|\mathrm{f}_2\rangle$

$$|v\rangle=\xi_1|\mathrm{e}_1\rangle+\xi_2|\mathrm{e}_2\rangle=\xi_1(1,0)+\xi_2(0,1)=(\xi_1,\xi_2)$$

$$|v\rangle=\eta_1|\mathrm{f}_1\rangle+\eta_2|\mathrm{f}_2\rangle=\eta_1(1,2)+(3,4)=(\eta_1+3\eta_2,2\eta_1+4\eta_2)$$

Како је реч о истом вектору, компоненте уређених парова с десне стране морају бити једнаке, те следи

$$\begin{cases}\xi_1=\eta_1+3\eta_2\\\xi_2=2\eta_1+4\eta_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-3\eta_2\\\xi_2=2\eta_1+4\eta_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-3\eta_2\\\xi_2=2\xi_1-6\eta_2+4\eta_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-3\eta_2\\\xi_2=2\xi_1-2\eta_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-3\eta_2\\2\eta_2=2\xi_1-\xi_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-3\eta_2\\\eta_2=\xi_1-\xi_2/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-3\xi_1+3\xi_2/2\\\eta_2=\xi_1-\xi_2/2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta_1=-2\xi_1+3\xi_2/2\\\eta_2=\xi_1-\xi_2/2\end{cases}$$

односно, произвољни вектор $|v\rangle$ у датом базису има облик

$$|v\rangle=\left(-2\xi_1+\frac{3\xi_2}{2}\right)|\mathrm{f}_1\rangle+\left(\xi_1-\frac{\xi_2}{2}\right)|\mathrm{f}_2\rangle\ ,$$

то јест, матрично

$$|v\rangle_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -2\xi_1 + \dfrac{3\xi_2}{2} \\ \xi_1 - \dfrac{\xi_2}{2} \end{bmatrix}_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} .$$

Провером задатог израза се види да он важи за $\forall |v\rangle \in \mathbb{R}^2$. Прво се проверава десна страна

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} [v]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -7 & -17 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} \begin{bmatrix} -2\xi_1 + \dfrac{3\xi_2}{2} \\ \xi_1 - \dfrac{\xi_2}{2} \end{bmatrix}_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}$$

$$= \begin{bmatrix} 14\xi_1 - \dfrac{21}{2}\xi_2 - 17\xi_1 + \dfrac{17}{2}\xi_2 \\ -8\xi_1 + 6\xi_2 + 10\xi_1 - 5\xi_2 \end{bmatrix}_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -3\xi_1 - 2\xi_2 \\ 2\xi_1 + \xi_2 \end{bmatrix}_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}$$

Да би се могла проверити лева страна, потребно је лик произвољног вектора

$$\hat{A}v = \hat{A}(\xi_1, \xi_2) = (3\xi_1 + \xi_2, 2\xi_1)$$

записати као линеарну комбинацију вектора датог базиса

$$\hat{A}v = \alpha|\mathrm{f}_1\rangle + \beta|\mathrm{f}_2\rangle = \alpha(1,2) + \beta(3,4) = (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta)$$

те потом, упоређивањем уређених парова, одредити коефицијенте α и β

$$\underline{\begin{cases} \alpha + 3\beta = 3\xi_1 + \xi_2 \\ 2\alpha + 4\beta = 2\xi_1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha + 3\beta = 3\xi_1 + \xi_2 \\ \alpha + 2\beta = \xi_1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha + 3\beta = 3\xi_1 + \xi_2 \\ \alpha = \xi_1 - 2\beta \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \underline{\begin{cases} \xi_1 - 2\beta + 3\beta = 3\xi_1 + \xi_2 \\ \alpha = \xi_1 - 2\beta \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \beta = 2\xi_1 + \xi_2 \\ \alpha = \xi_1 - 2\beta \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} \beta = 2\xi_1 + \xi_2 \\ \alpha = \xi_1 - 4\xi_1 - 2\xi_2 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \beta = 2\xi_1 + \xi_2 \\ \alpha = -3\xi_1 - 2\xi_2 \end{cases}}$$

те је онда

$$\hat{A}v = \alpha|\mathrm{f}_1\rangle + \beta|\mathrm{f}_2\rangle = (-3\xi_1 - 2\xi_2)|\mathrm{f}_1\rangle + (2\xi_1 + \xi_2)|\mathrm{f}_2\rangle,$$

што се матрично пише као

$$\left[\hat{A}v\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -3\xi_1 - 2\xi_2 \\ 2\xi_1 + \xi_2 \end{bmatrix}_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}$$

и једнако је са изразом

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} [v]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -3\xi_1 - 2\xi_2 \\ 2\xi_1 + \xi_2 \end{bmatrix}_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}},$$

чиме је показано да важи формула

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} [v]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} = \left[\hat{A}v\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}} .$$

(б) Матрица којом се представља оператор $\hat{B}$ у апсолутном базису добија се деловањем тог оператора на векторе апсолутног базиса према $\hat{B}(\xi_1,\xi_2)\stackrel{\mathrm{d}}{=}(\xi_1+2\xi_2,2\xi_1+\xi_2)$; тако добијене ликове треба, према основној формули репрезентовања, написати као линеарне комбинације вектора апсолутног базиса

$$\hat{B}|\mathrm{e}_1\rangle=\hat{B}(1,0)=(1+2\cdot 0,2\cdot 1+0)=(1,2)=1(1,0)+2(0,1)=1|\mathrm{e}_1\rangle+2|\mathrm{e}_2\rangle$$
$$\hat{B}|\mathrm{e}_2\rangle=\hat{B}(0,1)=(0+2\cdot 1,2\cdot 0+1)=(2,1)=2(1,0)+1(0,1)=2|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle$$

а потом коефицијенте обе линеарне комбинације написати као матричне елементе тражене матрице којом се представља оператор у апсолутном базису

$$\mathscr{B}=\left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}.$$

Матрица којом се представља оператор $\hat{B}$ у задатом базису добија се деловањем тог оператора на векторе задатог базиса према изразу $\hat{B}(\xi_1,\xi_2)\stackrel{\mathrm{d}}{=}(\xi_1+2\xi_2,2\xi_1+\xi_2)$; тако добијене ликове треба, према основној формули репрезентовања, написати као линеарне комбинације НЕ вектора апсолутног базиса, већ као линеарне комбинације вектора задатог базиса

$$\hat{B}|\mathrm{f}_1\rangle=\hat{B}(1,2)=(1+2\cdot 2,2\cdot 1+2)=(5,4)=\alpha|\mathrm{f}_1\rangle+\beta|\mathrm{f}_2\rangle=\alpha(1,2)+\beta(3,4)=(\alpha+3\beta,2\alpha+4\beta)$$
$$\hat{B}|\mathrm{f}_2\rangle=\hat{B}(3,4)=(3+2\cdot 4,2\cdot 3+4)=(11,10)=\gamma|\mathrm{f}_1\rangle+\delta|\mathrm{f}_2\rangle=\gamma(1,2)+\delta(3,4)=(\gamma+3\beta,2\gamma+4\delta)$$

при чему, за разлику од претходног случаја, коефицијенте прве линеарне комбинације треба одредити из првог система једначина

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=5\\ 2\alpha+4\beta=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+3\beta=5\\ \alpha+2\beta=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+3\beta=5\\ \alpha=2-2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-2\beta+3\beta=5\\ \alpha=2-2\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=3\\ \alpha=2-2\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=3\\ \alpha=-4\end{cases}$$

а коефицијенте друге линеарне комбинације из другог система једначина

$$\begin{cases}\gamma+3\delta=11\\ 2\gamma+4\delta=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma+3\delta=11\\ \gamma+2\delta=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma+3\delta=11\\ \gamma=5-2\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5-2\delta+3\delta=11\\ \gamma=5-2\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=6\\ \gamma=5-2\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\delta=6\\ \gamma=-7\end{cases}$$

Овиме се добијају следећа два израза

$$\hat{B}|\mathrm{f}_1\rangle=-4|\mathrm{f}_1\rangle+3|\mathrm{f}_2\rangle$$

$$\hat{B}|\mathrm{f}_2\rangle=-7|\mathrm{f}_1\rangle+6|\mathrm{f}_2\rangle$$

чији се коефицијенти потом записују као елементи тражене матрице којом се представља оператор у датом базису

$$\left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}-4 & -7\\ 3 & 6\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{f}_i\rangle\}}.$$

(5.8) У простору $\mathbb{R}^2$ дати су оператори

$$\hat{S}(\xi_1,\xi_2)\overset{\mathrm{d}}{=}(\xi_2,\xi_1) \quad \text{и} \quad \hat{T}(\xi_1,\xi_2)\overset{\mathrm{d}}{=}(0,\xi_1).$$

Одредити операторе $\hat{S}+\hat{T}$, $\hat{S}-3\hat{T}$, $\hat{S}\hat{T}$, $\hat{T}\hat{S}$, $\hat{S}^2$, $\hat{T}^2$ као и матрице којима се сви они представљају у апсолутном базису $\{|\mathrm{e}_1\rangle=(1,0),|\mathrm{e}_2\rangle=(0,1)\}$.

Првим оператором $\hat{S}(\xi_1,\xi_2)\overset{\mathrm{d}}{=}(\xi_2,\xi_1)$ делује се на ортове апсолутног базиса

$$\hat{S}|\mathrm{e}_1\rangle=\hat{S}(1,0)=(0,1)=0(1,0)+1(0,1)=0|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle$$
$$\hat{S}|\mathrm{e}_2\rangle=\hat{S}(0,1)=(1,0)=1(1,0)+0(0,1)=1|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle$$

па се коефицијенти обе линеарне комбинације сместе у матрицу

$$\mathscr{S}=\left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Другим оператором $\hat{T}(\xi_1,\xi_2)\overset{\mathrm{d}}{=}(0,\xi_1)$ делује се на ортове апсолутног базиса

$$\hat{T}|\mathrm{e}_1\rangle=\hat{T}(1,0)=(0,1)=0(1,0)+1(0,1)=0|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle$$
$$\hat{T}|\mathrm{e}_2\rangle=\hat{T}(0,1)=(0,0)=0(1,0)+0(0,1)=0|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle$$

те се коефицијенти обе линеарне комбинације сместе у матрицу

$$\mathscr{T}=\left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

Трећим оператором, који делује на произвољан вектор простора $\mathbb{R}^2$ на следећи начин

$$(\hat{S}+\hat{T})(\xi_1,\xi_2)=\hat{S}(\xi_1,\xi_2)+\hat{T}(\xi_1,\xi_2)=(\xi_2,\xi_1)+(0,\xi_1)=(\xi_2,2\xi_1),$$

делује се на ортове апсолутног базиса

$$(\hat{S}+\hat{T})|\mathrm{e}_1\rangle=(\hat{S}+\hat{T})(1,0)=(0,2\cdot 1)=0(1,0)+2(0,1)=0|\mathrm{e}_1\rangle+2|\mathrm{e}_2\rangle$$
$$(\hat{S}+\hat{T})|\mathrm{e}_2\rangle=(\hat{S}+\hat{T})(0,1)=(1,2\cdot 0)=1(1,0)+0(0,1)=1|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle$$

па се коефицијенти обе линеарне комбинације сместе у матрицу

$$\mathscr{S}+\mathscr{T}=\left[\hat{S}+\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}.$$

Четвртим оператором, који делује на произвољан вектор простора $\mathbb{R}^2$ на следећи начин

$$(\hat{S}-3\hat{T})(\xi_1,\xi_2)=\hat{S}(\xi_1,\xi_2)-3\hat{T}(\xi_1,\xi_2)=(\xi_2,\xi_1)-3(0,\xi_1)=(\xi_2,-2\xi_1),$$

делује се на ортове апсолутног базиса

$$(\hat{S}-3\hat{T})\left|\mathrm{e}_1\right\rangle=(\hat{S}-3\hat{T})(1,0)=(0,-2\cdot 1)=0(1,0)-2(0,1)=0\left|\mathrm{e}_1\right\rangle-2\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$
$$(\hat{S}-3\hat{T})\left|\mathrm{e}_2\right\rangle=(\hat{S}-3\hat{T})(0,1)=(1,-2\cdot 0)=1(1,0)+0(0,1)=1\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+0\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$

те се коефицијенти обе линеарне комбинације сместе у матрицу

$$\mathscr{S}-3\mathscr{T}=\left[\hat{S}-3\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}.$$

Петим оператором, који делује на произвољан вектор простора $\mathbb{R}^2$ на следећи начин

$$(\hat{S}\hat{T})(\xi_1,\xi_2)=\hat{S}\left(\hat{T}(\xi_1,\xi_2)\right)=\hat{S}(0,\xi_1)=(\xi_1,0),$$

делује се на ортове апсолутног базиса

$$(\hat{S}\hat{T})\left|\mathrm{e}_1\right\rangle=(\hat{S}\hat{T})(1,0)=(1,0)=1(1,0)+0(0,1)=1\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+0\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$
$$(\hat{S}\hat{T})\left|\mathrm{e}_2\right\rangle=(\hat{S}\hat{T})(0,1)=(0,0)=0(1,0)+0(0,1)=0\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+0\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$

па се коефицијенти обе линеарне комбинације сместе у матрицу

$$\mathscr{S}\mathscr{T}=\left[\hat{S}\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Шестим оператором, који делује на произвољан вектор простора $\mathbb{R}^2$ на следећи начин

$$(\hat{T}\hat{S})(\xi_1,\xi_2)=\hat{T}\left(\hat{S}(\xi_1,\xi_2)\right)=\hat{T}(\xi_2,\xi_1)=(0,\xi_2),$$

делује се на ортове апсолутног базиса

$$(\hat{T}\hat{S})\left|\mathrm{e}_1\right\rangle=(\hat{T}\hat{S})(1,0)=(0,0)=0(1,0)+0(0,1)=0\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+0\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$
$$(\hat{T}\hat{S})\left|\mathrm{e}_2\right\rangle=(\hat{T}\hat{S})(0,1)=(0,1)=0(1,0)+1(0,1)=0\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+1\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$

те се коефицијенти обе линеарне комбинације сместе у матрицу

$$\mathscr{T}\mathscr{S}=\left[\hat{T}\hat{S}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Седмим оператором, који делује на произвољан вектор простора $\mathbb{R}^2$ на следећи начин

$$\hat{S}^2(\xi_1,\xi_2)=(\hat{S}\hat{S})(\xi_1,\xi_2)=\hat{S}\left(\hat{S}(\xi_1,\xi_2)\right)=\hat{S}(\xi_2,\xi_1)=(\xi_1,\xi_2),$$

делује се на ортове апсолутног базиса

$$\hat{S}^2\left|\mathrm{e}_1\right\rangle=\hat{S}^2(1,0)=(1,0)=1(1,0)+0(0,1)=1\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+0\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$
$$\hat{S}^2\left|\mathrm{e}_2\right\rangle=\hat{S}^2(0,1)=(0,1)=0(1,0)+1(0,1)=0\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+1\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$

па се коефицијенти обе линеарне комбинације сместе у матрицу

$$\mathscr{S}^2=\left[\hat{S}^2\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Јасно је да је оператор $\hat{S}^2$ уствари јединични оператор $\hat{I}$, будући да својим деловањем оставља произвољан вектор непромењеним.

Осмим оператором, који делује на произвољан вектор простора $\mathbb{R}^2$ на следећи начин

$$\hat{T}^2(\xi_1,\xi_2) = (\hat{T}\,\hat{T})(\xi_1,\xi_2) = \hat{T}\left(\hat{T}(\xi_1,\xi_2)\right) = \hat{T}(0,\xi_1) = (0,0)\,,$$

делује се на ортове апсолутног базиса

$$\hat{T}^2\left|\mathrm{e}_1\right\rangle = \hat{T}^2(1,0) = (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1) = 0\left|\mathrm{e}_1\right\rangle + 0\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$
$$\hat{T}^2\left|\mathrm{e}_2\right\rangle = \hat{T}^2(0,1) = (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1) = 0\left|\mathrm{e}_1\right\rangle + 0\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$

те се коефицијенти обе линеарне комбинације сместе у матрицу

$$\mathscr{T}^2 = \left[\hat{T}^2\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очигледно је да је оператор $\hat{T}^2$ уствари нулти оператор $\hat{0}$, будући да својим деловањем претвара сваки вектор у нулти вектор.

(5.9) Показати да у простору $\mathbb{F}^{22}$ свака матрица

$$\mathscr{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ (a,b,c,d\in\mathbb{F})$$

представља линеарни оператор, под условом да се деловање оператора на вектор

$$|\,l\,\rangle=\hat{A}|o\rangle$$

дефинише као матрично множење матрице-колоне (којом се у апсолутном базису представља вектор) квадратном матрицом (којом се представља оператор у апсолутном базису)

(а) слева, (б) здесна.

У оба случаја одредити репрезентациону матрицу оператора датог матрицом

$$\mathscr{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

у апсолутном базису $\{|\mathrm{e}_1\rangle=(1,0),|\mathrm{e}_2\rangle=(0,1)\}$.

Да би оператор био линеаран, он мора линеарну комбинацију објеката пресликавања да преводи у линеарну комбинацију ликова (било слева било здесна)

$$\hat{A}\big(\alpha|o_1\rangle+\beta|o_2\rangle\big)=\alpha|l_1\rangle+\beta|l_2\rangle=\alpha\hat{A}|o_1\rangle+\beta\hat{A}|o_2\rangle\ ,$$

$$\big(\alpha|o_1\rangle+\beta|o_2\rangle\big)\hat{A}=\alpha|l_1\rangle+\beta|l_2\rangle=\alpha\,|o_1\rangle\hat{A}+\beta\,|o_2\rangle\hat{A}\ .$$

На основу изоморфности векторског простора вектора и векторског простора матрица, горњи израз може се записати као линеарна комбинација матрица-колона (којима се у простору $\mathbb{F}^{22}$ представљају објекти пресликавања)

$$\mathscr{A}\left(\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\right)=\alpha\,\mathscr{A}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\,\mathscr{A}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix},$$

$$\left(\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\right)\mathscr{A}=\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\mathscr{A}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\mathscr{A}\ ,$$

где је $\mathscr{A}$ квадратна матрица којом се у простору $\mathbb{F}^{22}$ представља оператор $\hat{A}$.

Ако се прво квадратном матрицом $\mathscr{A}$ множи слева линеарна комбинација двају матрица-колона

$$\mathscr{A}\left(\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\alpha\xi_1\\ \alpha\xi_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\eta_1\\ \beta\eta_2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\xi_1+\beta\eta_1\\ \alpha\xi_2+\beta\eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(\alpha\xi_1+\beta\eta_1)+b(\alpha\xi_2+\beta\eta_2)\\ c(\alpha\xi_1+\beta\eta_1)+d(\alpha\xi_2+\beta\eta_2)\end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&=\begin{bmatrix}\alpha(a\xi_1+b\xi_2)+\beta(a\eta_1+b\eta_2)\\ \alpha(c\xi_1+d\xi_2)+\beta(c\eta_1+d\eta_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha(a\xi_1+b\xi_2)\\ \alpha(c\xi_1+d\xi_2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta(a\eta_1+b\eta_2)\\ \beta(c\eta_1+d\eta_2)\end{bmatrix}\\
&=\alpha\begin{bmatrix}a\xi_1+b\xi_2\\ c\xi_1+d\xi_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}a\eta_1+b\eta_2\\ c\eta_1+d\eta_2\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\\
&=\alpha\,\mathscr{A}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\,\mathscr{A}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

јасно је да је матрица (као и оператор кога она представља) линеарна при матричном множењу матрица-колона слева квадратном матрицом.

Ако се потом квадратном матрицом $\mathscr{A}$ помножи здесна линеарна комбинација двају матрица-колона

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\right)\mathscr{A}&=\left(\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\\
&=\left(\begin{bmatrix}\alpha\xi_1\\ \alpha\xi_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\eta_1\\ \beta\eta_2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\xi_1+\beta\eta_1\\ \alpha\xi_2+\beta\eta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Сад, да би се матрица-колона (типа 2×1) могла матрично помножити квадратном матрицом (типа 2×2) - пошто се разликују број колона прве и број врста друге - матрица-колона се мора претворити у квадратну додавањем колоне са две нуле

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\right)\mathscr{A}&=\begin{bmatrix}\alpha\xi_1+\beta\eta_1\\ \alpha\xi_2+\beta\eta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\xi_1+\beta\eta_1 & 0\\ \alpha\xi_2+\beta\eta_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}(\alpha\xi_1+\beta\eta_1)a & (\alpha\xi_1+\beta\eta_1)b\\ (\alpha\xi_2+\beta\eta_2)a & (\alpha\xi_2+\beta\eta_2)b\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\alpha\xi_1a+\beta\eta_1a & \alpha\xi_1b+\beta\eta_1b\\ \alpha\xi_2a+\beta\eta_2a & \alpha\xi_2b+\beta\eta_2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\xi_1a & \alpha\xi_1b\\ \alpha\xi_2a & \alpha\xi_2b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\eta_1a & \beta\eta_1b\\ \beta\eta_2a & \beta\eta_2b\end{bmatrix}\\
&=\alpha\begin{bmatrix}\xi_1a & \xi_1b\\ \xi_2a & \xi_2b\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1a & \eta_1b\\ \eta_2a & \eta_2b\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}\xi_1 & 0\\ \xi_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1 & 0\\ \eta_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Супротно од малопре, сада се леве квадратне матрице могу писати као матрице-колоне, чиме се добија

$$
\left(\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\right)\mathscr{A}=\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\mathscr{A}+\beta\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}\mathscr{A}
$$

одакле је очигледно да је матрица (као и оператор кога она представља) линеарна при матричном множењу матрица-колона здесна квадратном матрицом.

Прво треба представити матрице $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ у апсолутном базису

$$
\left\{\mathscr{E}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\mathscr{E}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\mathscr{E}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\mathscr{E}_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}
$$

простора $\mathbb{F}^{22}$ ако се матрично множење врши слева. Почиње се са основним формулама репрезентовања за сваки од ортова апсолутног базиса

$$\mathscr{A}\mathscr{E}_1=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0\\ c & 0\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=a\mathscr{E}_1+0\mathscr{E}_2+c\mathscr{E}_3+0\mathscr{E}_4$$

$$\mathscr{A}\mathscr{E}_2=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a\\ 0 & c\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=0\mathscr{E}_1+a\mathscr{E}_2+0\mathscr{E}_3+c\mathscr{E}_4$$

$$\mathscr{A}\mathscr{E}_3=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & 0\\ d & 0\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=b\mathscr{E}_1+0\mathscr{E}_2+d\mathscr{E}_3+0\mathscr{E}_4$$

$$\mathscr{A}\mathscr{E}_4=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & d\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=0\mathscr{E}_1+b\mathscr{E}_2+0\mathscr{E}_3+d\mathscr{E}_4$$

чији се коефицијенти потом сместе у матрицу којом се представља матрица $\mathscr{A}$ у апсолутном базису (за матрично множење слева)

$$\mathscr{A}_{\{\mathscr{E}_i\}}=\begin{bmatrix}a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{bmatrix},$$

а из које је лако добити матрицу којом се представља матрица

$$\mathscr{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

у апсолутном базису (за матрично множење слева)

$$\mathscr{B}_{\{\mathscr{E}_i\}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Друго, треба представити матрице $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ у апсолутном базису

$$\left\{\mathscr{E}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\mathscr{E}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\mathscr{E}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\mathscr{E}_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

простора $\mathbb{F}^{22}$ ако се матрично множење врши здесна. Прво се напишу основне формуле репрезентовања за сваки од ортова апсолутног базиса

$$\mathscr{E}_1\mathscr{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=a\mathscr{E}_1+b\mathscr{E}_2+0\mathscr{E}_3+0\mathscr{E}_4$$

$$\mathscr{E}_2\mathscr{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=c\mathscr{E}_1+d\mathscr{E}_2+0\mathscr{E}_3+0\mathscr{E}_4$$

$$\mathscr{E}_3 \cdot \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\mathscr{E}_1 + 0\mathscr{E}_2 + a\mathscr{E}_3 + b\mathscr{E}_4$$

$$\mathscr{E}_4 \cdot \mathscr{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\mathscr{E}_1 + 0\mathscr{E}_2 + c\mathscr{E}_3 + d\mathscr{E}_4$$

чији се коефицијенти потом сместе у матрицу којом се представља матрица $\cdot\mathscr{A}$ у апсолутном базису (за матрично множење здесна)

$$\mathscr{A}_{\{\mathscr{E}_i\}} = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix},$$

а из које је лако добити матрицу којом се представља матрица

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

у апсолутном базису (за матрично множење здесна)

$$\mathscr{B}_{\{\mathscr{E}_i\}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(5.10) Одредити матрице које представљају оператор $\hat{P}_A$ из $\mathbb{L}(\mathbb{R}^{22},\mathbb{R}^{22})$ - дефинисан својим деловањем на произвољну матрицу $\mathscr{X}$ из $\mathbb{R}^{22}$

$$\hat{P}_A\mathscr{X} = \mathscr{A}\mathscr{X} - \mathscr{X}\mathscr{A},$$

где је $\mathscr{A}$ унапред задата матрица из $\mathbb{R}^{22}$ - у апсолутном базису

$$\left\{\mathscr{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\mathscr{E}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\mathscr{E}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\mathscr{E}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\},$$

као и у базису

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}.$$

(а) Да би се добила матрица оператора $\hat{P}_A$ у апсолутном базису, мора се њиме деловати на матрице које сачињавају поменути базис

$$\hat{P}_A\mathscr{E}_1=\mathscr{A}\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_1\mathscr{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\c&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-b\\c&0\end{bmatrix}$$
$$=0\mathscr{E}_1+(-b)\mathscr{E}_2+c\mathscr{E}_3+0\mathscr{E}_4$$

$$\hat{P}_A\mathscr{E}_2=\mathscr{A}\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_2\mathscr{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a\\0&c\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}c&d\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c&a-d\\0&c\end{bmatrix}$$
$$=(-c)\mathscr{E}_1+(a-d)\mathscr{E}_2+0\mathscr{E}_3+c\mathscr{E}_4$$

$$\hat{P}_A\mathscr{E}_3=\mathscr{A}\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_3\mathscr{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&0\\d&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&0\\d-a&-b\end{bmatrix}$$
$$=b\mathscr{E}_1+0\mathscr{E}_2+(d-a)\mathscr{E}_3+(-b)\mathscr{E}_4$$

$$\mathscr{A}\mathscr{E}_4=\hat{P}_A\mathscr{E}_4=\mathscr{A}\mathscr{E}_4-\mathscr{E}_4\mathscr{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&b\\0&d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&b\\-c&0\end{bmatrix}$$
$$=0\mathscr{E}_1+b\mathscr{E}_2+(-c)\mathscr{E}_3+0\mathscr{E}_4$$

Након што се овако добијени коефицијенти распореде по врстама, добија се тражена матрица оператора $\hat{P}_A$ у апсолутном базису

$$\mathscr{P}_{\mathscr{A}}=\left[\hat{P}_A\right]_{\{\mathscr{E}_i\}}=\begin{bmatrix}0&-c&b&0\\-b&a-d&0&b\\c&0&d-a&-c\\0&c&-b&0\end{bmatrix}.$$

(б) Да би се добила матрица оператора $\hat{P}_A$ у задатом базису, мора се поменутим оператором деловати на матрице које сачињавају поменути базис

$$\hat{P}_A \mathscr{F}_1 = \mathscr{A}\mathscr{F}_1 - \mathscr{F}_1\mathscr{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix} = 0\mathscr{E}_1 - b\mathscr{E}_2 + c\mathscr{E}_3 + 0\mathscr{E}_4$$

$$\hat{P}_A \mathscr{F}_2 = \mathscr{A}\mathscr{F}_2 - \mathscr{F}_2\mathscr{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -c & a-b-d \\ c & c \end{bmatrix} = -c\mathscr{E}_1 + (a-b-d)\mathscr{E}_2 + c\mathscr{E}_3 + c\mathscr{E}_4$$

$$\hat{P}_A \mathscr{F}_3 = \mathscr{A}\mathscr{F}_3 - \mathscr{F}_3\mathscr{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b-c & a-b-d \\ -a+c+d & -b+c \end{bmatrix} = (b-c)\mathscr{E}_1 + (a-b-d)\mathscr{E}_2 + (-a+c+d)\mathscr{E}_3 + (-b+c)\mathscr{E}_4$$

$$\hat{P}_A \mathscr{F}_4 = \mathscr{A}\mathscr{F}_4 - \mathscr{F}_4\mathscr{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b-c & a-d \\ -a+d & -b+c \end{bmatrix} = (b-c)\mathscr{E}_1 + (a-d)\mathscr{E}_2 + (-a+d)\mathscr{E}_3 + (-b+c)\mathscr{E}_4$$

Јасно је да добијени изрази нису у складу с основном формулом репрезентовања - на десној страни горњих израза не смеју се налазити матрице $\mathscr{E}_1$ $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$ и $\mathscr{E}_4$ већ матрице $\mathscr{F}_1$ $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$ и $\mathscr{F}_4$. Да би се то могло постићи, прво матрице задатог базиса $\mathscr{F}_1$ $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$ и $\mathscr{F}_4$ треба развити по матрицама апсолутног базиса

$$\mathscr{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathscr{E}_1$$

$$\mathscr{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$$

$$\mathscr{F}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3$$

$$\mathscr{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 + \mathscr{E}_4$$

потом матрице апсолутног базиса треба изразити преко матрица задатог базиса

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{F}_1$$

$$\mathscr{E}_2 = \mathscr{F}_2 - \mathscr{E}_1 = \mathscr{F}_2 - \mathscr{F}_1$$

$$\mathscr{E}_3 = \mathscr{F}_3 - \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = \mathscr{F}_3 - \cancel{\mathscr{F}_1} - \mathscr{F}_2 + \cancel{\mathscr{F}_1} = \mathscr{F}_3 - \mathscr{F}_2$$

$$\mathscr{E}_4 = \mathscr{F}_4 - \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 = \mathscr{F}_4 - \cancel{\mathscr{F}_1} - \cancel{\mathscr{F}_2} + \cancel{\mathscr{F}_1} - \mathscr{F}_3 + \cancel{\mathscr{F}_2} = \mathscr{F}_4 - \mathscr{F}_3$$

чијом се заменом у горе добијена четири израза добијају формуле које су у складу са основном формулом репрезентовања

$$\begin{aligned}\hat{P}_A \mathscr{F}_1 &= -b\mathscr{E}_2 + c\mathscr{E}_3 = b(\mathscr{F}_2 - \mathscr{F}_1) + c(\mathscr{F}_3 - \mathscr{F}_2)\\ &= b\mathscr{F}_1 - (b+c)\mathscr{F}_2 + c\mathscr{F}_3 + 0\mathscr{F}_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{P}_A \mathscr{F}_2 &= -c\mathscr{E}_1 + (a-b-d)\mathscr{E}_2 + c\mathscr{E}_3 + c\mathscr{E}_4 = -c\mathscr{F}_1 + (a-b-d)(\mathscr{F}_2 - \mathscr{F}_1) + c(\mathscr{F}_3 - \mathscr{F}_2) + c(\mathscr{F}_4 - \mathscr{F}_3)\\ &= (-a+b-c+d)\mathscr{F}_1 + (a-b-c-d)\mathscr{F}_2 + 0\mathscr{F}_3 + c\mathscr{F}_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{P}_A \mathscr{F}_3 &= (b-c)\mathscr{F}_1 + (a-b-d)(\mathscr{F}_2 - \mathscr{F}_1) + (-a+c+d)(\mathscr{F}_3 - \mathscr{F}_2) + (-b+c)(\mathscr{F}_4 - \mathscr{F}_3)\\ &= (-a+2b-c+d)\mathscr{F}_1 + (2a-b-c-2d)\mathscr{F}_2 + (-a+b+d)\mathscr{F}_3 + (-b+c)\mathscr{F}_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{P}_A \mathscr{F}_4 &= (b-c)\mathscr{E}_1 + (a-d)\mathscr{E}_2 + (-a+d)\mathscr{E}_3 + (-b+c)\mathscr{E}_4\\ &= (b-c)\mathscr{F}_1 + (a-d)(\mathscr{F}_2 - \mathscr{F}_1) + (-a+d)(\mathscr{F}_3 - \mathscr{F}_2) + (-b+c)(\mathscr{F}_4 - \mathscr{F}_3)\\ &= (-a+b-c+d)\mathscr{F}_1 + (2a-2d)\mathscr{F}_2 + (-a+b-c+d)\mathscr{F}_3 + (-b+c)\mathscr{F}_4\end{aligned}$$

чији се коефицијенти потом распореде по врстама, што коначно даје тражену матрицу оператора $\hat{P}_A$ у задатом базису

$$\mathscr{P}_{\mathscr{A}} = \left[\hat{P}_A\right]_{\{\mathscr{E}_i\}} = \begin{bmatrix} b & -a+b-c+d & -a+2b-c+d & -a+b-c+d \\ -b-c & a-b-c-d & 2a-b-c-2d & 2a-2d \\ c & 0 & -a+b+d & -a+b-c+d \\ 0 & c & -b+c & -b+c \end{bmatrix}.$$

(5.11) Одредити матрице којима се у апсолутном базису $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ векторског простора $\mathbb{R}^3$ представљају следећи линеарни оператори

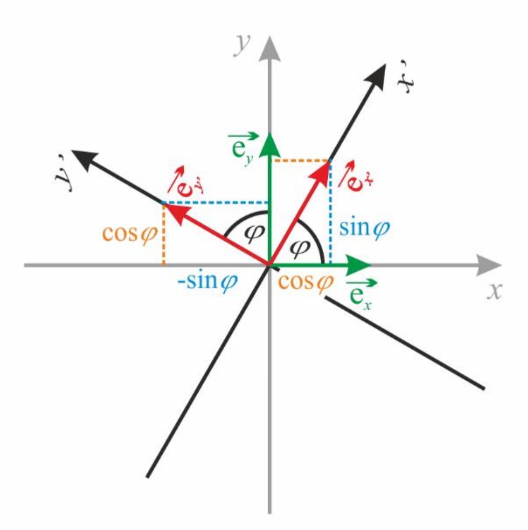
(а) *ротација* око $z-$осе за угао φ;

(б) *рефлексија* у односу на $y-$осу;

(в) *рефлексија* у односу на $xy-$раван;

(г) *инверзија* у односу на координатни почетак.

(а) Операција *ротације* око $z-$осе за угао φ представљена је на слици



Са слике се види да су

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{x'} &= \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \\
\vec{e}_{y'} &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \\
\vec{e}_{z'} &= \vec{e}_z
\end{aligned}$$

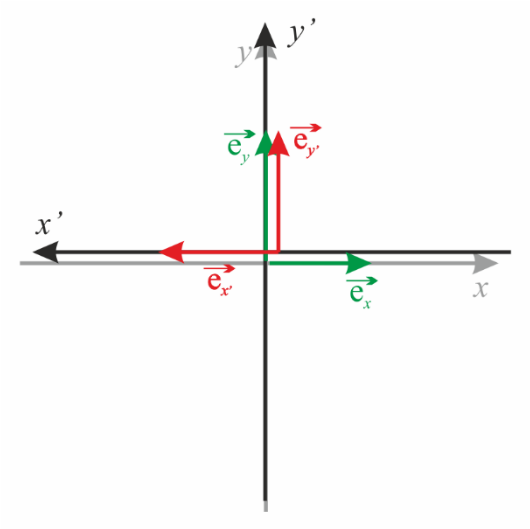
Како се вектори $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$ и $\vec{e}_{z'}$ крајњег координатног система добијају након тражене ротације од вектора полазног координатног система $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$, таква ротација може се представити као деловање ротационог оператора на следећи начин: $\vec{e}_{x'} = \hat{R}_z\vec{e}_x$, $\vec{e}_{y'} = \hat{R}_z\vec{e}_y$ и $\vec{e}_{z'} = \hat{R}_z\vec{e}_z$, те је онда

$$\begin{aligned}
\hat{R}_z\vec{e}_x &= \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z \\
\hat{R}_z\vec{e}_y &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z \\
\hat{R}_z\vec{e}_z &= 0\,\vec{e}_x + 0\,\vec{e}_y + 1\,\vec{e}_z
\end{aligned}$$

одакле се може написати матрица ротационог оператора око $z-$осе за угао φ

$$\mathscr{R}_z = \left[\hat{R}_z\right]_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(б) Операцију *рефлексије* у односу на $y-$осу илуструје слика



са које се види да су

$$\vec{e}_{x'} = -\vec{e}_x, \vec{e}_{y'} = \vec{e}_y, \ \vec{e}_{z'} = \vec{e}_z .$$

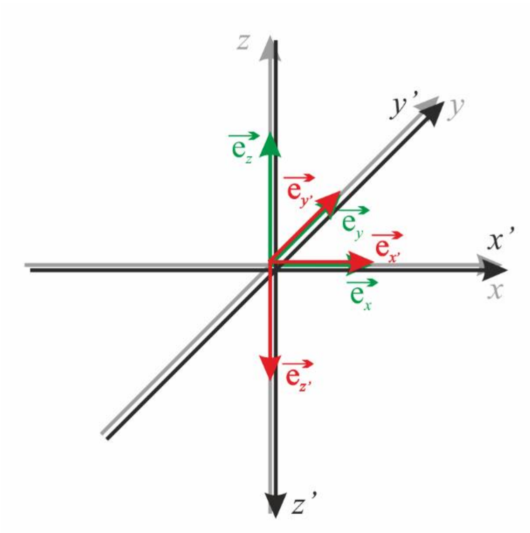
Будући да се вектори $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$ и $\vec{e}_{z'}$ крајњег координатног система добијају након поменуте рефлексије од вектора почетног координатног система $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$, то се може заменити деловањем рефлексионог оператора на следећи начин: $\vec{e}_{x'} = \hat{F}_y \vec{e}_x$, $\vec{e}_{y'} = \hat{F}_y \vec{e}_y$ и $\vec{e}_{z'} = \hat{F}_y \vec{e}_z$, па је

$$\begin{aligned} \hat{F}_y \vec{e}_x &= (-1)\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + 0\vec{e}_z \\ \hat{F}_y \vec{e}_y &= 0\vec{e}_x + 1\vec{e}_y + 0\vec{e}_z \\ \hat{F}_y \vec{e}_z &= 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + 1\vec{e}_z \end{aligned}$$

Матрица рефлексионог оператора у односу на $y-$осу је онда дата као

$$\mathscr{F}_y = \left[\hat{F}_y\right]_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(в) Операција *рефлексије* у односу на $xy-$раван представљена је на слици



са које је јасно да је

$$\vec{e}_{x'} = \vec{e}_x,\ \vec{e}_{y'} = \vec{e}_y,\ \vec{e}_{z'} = -\vec{e}_z\,.$$

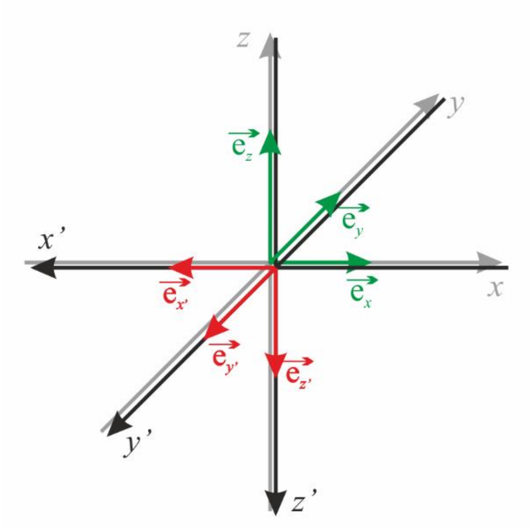
Вектори $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$ и $\vec{e}_{z'}$ крајњег координатног система добијају се од вектора почетног $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$ након поменуте рефлексије, што се може представити као деловање рефлексионог оператора на следећи начин: $\vec{e}_{x'} = \hat{F}_{xy}\,\vec{e}_x$, $\vec{e}_{y'} = \hat{F}_{xy}\,\vec{e}_y$ и $\vec{e}_{z'} = \hat{F}_{xy}\,\vec{e}_z$, те бива

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{xy}\,\vec{e}_x &= 1\vec{e}_x + 0\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z \\
\hat{F}_{xy}\,\vec{e}_y &= 0\,\vec{e}_x + 1\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z \\
\hat{F}_{xy}\,\vec{e}_z &= 0\,\vec{e}_x + 0\,\vec{e}_y + (-1)\,\vec{e}_z
\end{aligned}$$

одакле се може написати матрица рефлексионог оператора у односу на $xy-$раван

$$\mathscr{F}_{xy} = \left[\hat{F}_{xy}\right]_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(г) Операција *инверзије* у односу на координатни почетак представљена је сликом



са које је евидентно

$$\vec{e}_{x'} = -\vec{e}_x\,,\ \vec{e}_{y'} = -\vec{e}_y\,,\ \vec{e}_{z'} = -\vec{e}_z\,.$$

Вектори $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$ и $\vec{e}_{z'}$ коначног координатног система добијају се од вектора почетног координатног система $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$ након захтеване инверзије, што се може представити као деловање инверзионог оператора према изразима: $\vec{e}_{x'} = \hat{I}_0 \vec{e}_x$, $\vec{e}_{y'} = \hat{I}_0 \vec{e}_y$ и $\vec{e}_{z'} = \hat{I}_0 \vec{e}_z$, чиме се добијају формуле

$$\begin{aligned}
\hat{I}_0 \vec{e}_x &= (-1)\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + 0\vec{e}_z \\
\hat{I}_0 \vec{e}_y &= 0\vec{e}_x + (-1)\vec{e}_y + 0\vec{e}_z \\
\hat{I}_0 \vec{e}_z &= 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + (-1)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

што коначно даје матрицу инверзионог оператора у односу на координатни почетак

$$\mathscr{I}_0 = \left[\hat{I}_0\right]_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(5.12) Показати да је оператор $\hat{T}$ - дефинисан изразом: $\hat{T}|v\rangle = \langle v|a\rangle|b\rangle$ - *антилинеаран*, као и да је оператор $\hat{P}$ - дефинисан изразом: $\hat{P}|v\rangle = \langle a|v\rangle|b\rangle$ - *линеаран* у унитарном простору $\mathbb{U}$; вектори $|a\rangle$ и $|b\rangle$ унапред су задати ненулти вектори, док је $|v\rangle$ произвољан вектор.

У случају када је $\mathbb{U} = \mathbb{C}^3$, одредити матричну репрезентацију оператора $\hat{P}$ за векторе $|a\rangle = |b\rangle = (2, 0, -1)$, и то у

(а) базисима који немају *ниједан* вектор ортогоналан на вектор $|a\rangle$;

(б) базисима који имају *један* вектор ортогоналан на вектор $|a\rangle$;

(в) базисима који имају *два* вектора ортогонална на вектор $|a\rangle$.

Да би оператор $\hat{T}$ био антилинеаран, он мора претварати линеарну комбинацију објеката пресликавања у линеарну комбинацију ликова, али са комплексно коњугованим коефицијентима. Према дефиницији, оператор $\hat{T}$ делује на следећи начин на линеарну комбинацију произвољних вектора

$$\hat{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right) = \left\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle v_i|\,\middle|\,a\right\rangle|b\rangle.$$

На основу особине дистрибутивности скаларног производа у односу на сабирање вектора по првом фактору следи

$$\hat{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\langle\alpha_i\langle v_i||a\rangle|b\rangle$$

а на основу особине антилинеарности скаларног производа по првом фактору биће

$$\hat{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*\langle v_i|a\rangle|b\rangle.$$

Применом дефиниције оператора $\hat{T}$ у супротном смеру, добија се

$$\hat{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*\hat{T}|v_i\rangle$$

што значи да је поменути оператор стварно *антилинеаран*.

Да би оператор $\hat{P}$ био линеаран, он мора претварати линеарну комбинацију објеката пресликавања у линеарну комбинацију ликова. Према дефиницији, оператор $\hat{P}$ делује на следећи начин на линеарну комбинацију произвољних вектора

$$\hat{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right) = \left\langle a\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right\rangle|b\rangle.$$

Скаларни производ је дистрибутиван у односу на сабирање вектора по другом фактору па

$$\hat{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left|v_i\right\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle a\left|\alpha_i\left|v_i\right\rangle\right.\right\rangle\left|b\right\rangle$$

а и линеаран је по другом фактору, те онда горњи израз поприма облик

$$\hat{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left|v_i\right\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left\langle a\middle|v_i\right\rangle\left|b\right\rangle .$$

Применом дефиниције оператора $\hat{P}$ у супротном смеру, добија се

$$\hat{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left|v_i\right\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\hat{P}\left|v_i\right\rangle$$

што значи да је поменути оператор стварно *линеаран*.

(а) Базис вектора $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\}$ који *нису ортогонални* на векторе $|a\rangle=|b\rangle=(2,0,-1)$ мора да задовољава услове

$$\langle a|v_1\rangle=C_1\,,\ \langle a|v_2\rangle=C_2\,,\ \langle a|v_3\rangle=C_3\,.$$

Ако се на векторе оваквог базиса делује оператором $\hat{P}$, добија се

$$\hat{P}|v_1\rangle=\langle a|v_1\rangle|b\rangle=C_1|b\rangle,\ \hat{P}|v_2\rangle=\langle a|v_2\rangle|b\rangle=C_2|b\rangle,\ \hat{P}|v_3\rangle=\langle a|v_3\rangle|b\rangle=C_3|b\rangle.$$

Пошто је $|a\rangle=|b\rangle$, горњи изрази попримају облик

$$\hat{P}|v_1\rangle=C_1|a\rangle,\ \hat{P}|v_2\rangle=C_2|a\rangle,\ \hat{P}|v_3\rangle=C_3|a\rangle,$$

а како је вектор $|a\rangle$ дат као уређена тројка: $|a\rangle=(2,0,-1)=2|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+(-1)|\mathrm{e}_3\rangle$, биће

$$\hat{P}|v_1\rangle=C_1\left(2|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+(-1)|\mathrm{e}_3\rangle\right)=2C_1|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+(-C_1)|\mathrm{e}_3\rangle,$$

$$\hat{P}|v_2\rangle=C_2\left(2|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+(-1)|\mathrm{e}_3\rangle\right)=2C_2|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+(-C_2)|\mathrm{e}_3\rangle,$$

$$\hat{P}|v_3\rangle=C_1\left(2|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+(-1)|\mathrm{e}_3\rangle\right)=2C_3|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+(-C_3)|\mathrm{e}_3\rangle,$$

одакле се добија тражена матрична репрезентација оператора $\hat{P}$

$$\left[\hat{P}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}2C_1 & 2C_2 & 2C_3\\ 0 & 0 & 0\\ -C_1 & -C_2 & -C_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\langle a|v_1\rangle & 2\langle a|v_2\rangle & 2\langle a|v_3\rangle\\ 0 & 0 & 0\\ -\langle a|v_1\rangle & -\langle a|v_2\rangle & -\langle a|v_3\rangle\end{bmatrix}.$$

(б) Како за базис вектора $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\}$ од којих је један вектор *ортогоналан* на векторе $|a\rangle=|b\rangle=(2,0,-1)$ морају бити испуњени услови

$$\langle a|v_1\rangle=0\,,\ \langle a|v_2\rangle=C_2\,,\ \langle a|v_3\rangle=C_3\,.$$

а будући да је малопређашњи поступак потпуно исти, на крају се добија матрична репрезентација оператора $\hat{P}$ облика

$$\left[\hat{P}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0 & 2C_2 & 2C_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -C_2 & -C_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\langle a|v_2\rangle & 2\langle a|v_3\rangle\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -\langle a|v_2\rangle & -\langle a|v_3\rangle\end{bmatrix}.$$

(в) Коначно, базис вектора $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\}$ од којих су два вектора *ортогонална* на векторе $|a\rangle=|b\rangle=(2,0,-1)$ мора да испуњава услове

$$\langle a|v_1\rangle=0\,,\ \langle a|v_2\rangle=0\,,\ \langle a|v_3\rangle=C_3\,.$$

а како је опет првобитни поступак потпуно исти, тражена матрична репрезентација оператора $\hat{P}$ може се одмах написати као

$$\left[\hat{P}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2C_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -C_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\langle a|v_3\rangle\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\langle a|v_3\rangle\end{bmatrix}.$$

(5.13) Нека је у простору оператора $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ дат оператор $\hat{B}$, где је $\mathbb{U}$ произвољан унитарни простор. Показати да је скуп свих оператора $\hat{A}$ - таквих да је $\hat{B}\hat{A}=\hat{0}$ - *потпростор* простора $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$.

Скуп свих оператора $\hat{A}$ који задовољавају тражени услов ($\hat{B}\hat{A}=\hat{0}$) је, за $\hat{B}\in\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$

$$\mathbb{A}=\left\{\hat{A}\mid \hat{B}\hat{A}=\hat{0},\forall\hat{A}\in\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})\right\}.$$

Услов да горњи скуп $\mathbb{A}$ буде потпростор гласи, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}$

$$\forall\hat{A}_1,\hat{A}_2\in\mathbb{A}\subset\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})\ \Rightarrow\ \alpha\hat{A}_1+\beta\hat{A}_2\in\mathbb{A}.$$

Провера задовољености горњег услова

$$\hat{B}(\alpha\hat{A}_1+\beta\hat{A}_2)=\hat{B}(\alpha\hat{A}_1)+\hat{B}(\beta\hat{A}_2)=\alpha\,\hat{B}\hat{A}_1+\beta\,\hat{B}\hat{A}_2=\alpha\,\hat{0}+\beta\,\hat{0}=\hat{0}.$$

Пошто је $\alpha\hat{A}_1+\beta\hat{A}_2\in\mathbb{A}$, то значи да је $\mathbb{A}$ потпростор.

(5.14) Нека су у векторском простору $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ оператора (који претварају уређене тројке у уређене парове) дата три оператора. Испитати да ли су они *линеарно независни* у следећа два случаја

(а) $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1+\xi_3,\xi_1+\xi_2)$

$\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_1+\xi_2)$

$\hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_2,\xi_1)$

(б) $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_1+3\xi_2+2\xi_3,\xi_1)$

$\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_2,0)$

$\hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_1+4\xi_2+2\xi_3,\xi_1)$.

Како простор оператора $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ задовољава све аксиоме векторског простора, то се линеарна независност оператора у њему проверава на начин коришћен у случају векторских простора, изједначавањем линеарне комбинације задатих вектора (у овом случају оператора) са нултим елементом датог простора (у овом случају нултог оператора), и утврђивањем да ли су сви коефицијенти поменуте линеарне комбинације понаособ једнаки нули.

(а) Израз за проверу линеарне независности задатих оператора гласи

$$\alpha\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\beta\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\gamma\hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\hat{0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,,$$

само га треба применити на ортове апсолутног базиса, што даје систем једначина

$$\begin{cases}\alpha\hat{A}(1,0,0)+\beta\hat{B}(1,0,0)+\gamma\hat{C}(1,0,0)=\hat{0}(1,0,0)\\ \alpha\hat{A}(0,1,0)+\beta\hat{B}(0,1,0)+\gamma\hat{C}(0,1,0)=\hat{0}(0,1,0)\\ \alpha\hat{A}(0,0,1)+\beta\hat{B}(0,0,1)+\gamma\hat{C}(0,0,1)=\hat{0}(0,0,1)\end{cases}$$

чијим се решавањем добија

$$\begin{cases}\alpha(2,1)+\beta(1,1)+\gamma(0,1)=(0,0)\\ \alpha(0,1)+\beta(1,1)+\gamma(2,0)=(0,0)\\ \alpha(1,0)+\beta(1,0)+\gamma(0,0)=(0,0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma)=(0,0)\\ (\beta+2\gamma,\alpha+\beta)=(0,0)\\ (\alpha+\beta,0)=(0,0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \beta+2\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \beta=-2\gamma\\ \alpha=-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \beta=-2\gamma\\ \alpha=2\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\gamma-2\gamma+\gamma=0\\ \beta=-2\gamma\\ \alpha=2\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=0\\ \beta=-2\gamma\\ \alpha=2\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=0\\ \beta=0\\ \alpha=0\end{cases}$$

да су задата три оператора заиста *линеарно независна* у простору $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$.

(б) Сада се проверава линеарна независност друге групе задатих оператора, као

$$\alpha\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\beta\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\gamma\hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\hat{0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,,$$

при чему горњи израз треба применити на ортове апсолутног базиса, што опет даје систем

$$\begin{cases} \alpha\hat{A}(1,0,0)+\beta\hat{B}(1,0,0)+\gamma\hat{C}(1,0,0)=\hat{0}(1,0,0) \\ \alpha\hat{A}(0,1,0)+\beta\hat{B}(0,1,0)+\gamma\hat{C}(0,1,0)=\hat{0}(0,1,0) \\ \alpha\hat{A}(0,0,1)+\beta\hat{B}(0,0,1)+\gamma\hat{C}(0,0,1)=\hat{0}(0,0,1) \end{cases}$$

чијим се решавањем добија

$$\begin{cases} \alpha(1,1)+\beta(0,0)+\gamma(1,1)=(0,0) \\ \alpha(3,0)+\beta(2,0)+\gamma(4,0)=(0,0) \\ \alpha(2,0)+\beta(0,0)+\gamma(2,0)=(0,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\gamma,\alpha+\gamma)=(0,0) \\ (3\alpha+2\beta+4\gamma,0)=(0,0) \\ (2\alpha+2\gamma,0)=(0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ 3\alpha+2\beta+4\gamma=0 \\ \alpha+\gamma=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ 3\alpha+2\beta+4\gamma=0 \\ \alpha=-\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ -3\gamma+2\beta+4\gamma=0 \\ \alpha=-\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ \gamma=-2\beta \\ \alpha=-\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ \gamma=-2\beta \\ \alpha=2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta-2\beta=0 \\ \gamma=-2\beta \\ \alpha=2\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2-2)\beta=0 \\ \gamma=-2\beta \\ \alpha=2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot\beta=0 \\ \gamma=-2\beta \\ \alpha=2\beta \end{cases}$$

Како коефицијент β линеарне комбинације може да буде било који реалан број (уместо искључиво и само нула), то су задата три оператора *линеарно зависни* у простору $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$.

(5.15) Показати да скуп оператора

$$\begin{Bmatrix} \hat{E}_{11}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_1,0), \hat{E}_{12}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_2,0), \hat{E}_{13}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_3,0), \\ \hat{E}_{21}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(0,\xi_1), \hat{E}_{22}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(0,\xi_2), \hat{E}_{23}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(0,\xi_3) \end{Bmatrix}$$

представља *базис* простора $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$, а затим операторе

(а) $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1+\xi_3,\xi_1+\xi_2)$

$\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_1+\xi_2)$

$\hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_2,\xi_1)$

(б) $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_1+3\xi_2+2\xi_3,\xi_1)$

$\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_2,0)$

$\hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_1+4\xi_2+2\xi_3,\xi_1)$.

разложити по горе задатих шест базних оператора.

Као и у претходном задатку, простор оператора $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ задовољава све аксиоме векторског простора, те се линеарна независност задатих шест оператора проверава изједначавањем линеарне комбинације задатих оператора са нултим оператором, и утврђивањем да ли су сви коефицијенти такве линеарне комбинације понаособ једнаки нули. Прво се формира линеарна комбинација задатих шест оператора

$$\alpha\hat{E}_{11}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\beta\hat{E}_{12}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\gamma\hat{E}_{13}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\delta\hat{E}_{21}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\mu\hat{E}_{22}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\eta\hat{E}_{23}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\hat{0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

а потом се она примени на сва три вектора апсолутног базиса

$$\begin{cases} \alpha\hat{E}_{11}(1,0,0)+\beta\hat{E}_{12}(1,0,0)+\gamma\hat{E}_{13}(1,0,0)+\delta\hat{E}_{21}(1,0,0)+\mu\hat{E}_{22}(1,0,0)+\eta\hat{E}_{23}(1,0,0)=\hat{0}(1,0,0) \\ \alpha\hat{E}_{11}(0,1,0)+\beta\hat{E}_{12}(0,1,0)+\gamma\hat{E}_{13}(0,1,0)+\delta\hat{E}_{21}(0,1,0)+\mu\hat{E}_{22}(0,1,0)+\eta\hat{E}_{23}(0,1,0)=\hat{0}(0,1,0) \\ \alpha\hat{E}_{11}(0,0,1)+\beta\hat{E}_{12}(0,0,1)+\gamma\hat{E}_{13}(0,0,1)+\delta\hat{E}_{21}(0,0,1)+\mu\hat{E}_{22}(0,0,1)+\eta\hat{E}_{23}(0,0,1)=\hat{0}(0,0,1) \end{cases}$$

што даје систем једначина

$$\begin{cases} \alpha(1,0)+\beta(0,0)+\gamma(0,0)+\delta(0,1)+\mu(0,0)+\eta(0,0)=(0,0) \\ \alpha(0,0)+\beta(1,0)+\gamma(0,0)+\delta(0,0)+\mu(0,1)+\eta(0,0)=(0,0) \\ \alpha(0,0)+\beta(0,0)+\gamma(1,0)+\delta(0,0)+\mu(0,0)+\eta(0,1)=(0,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1,0)+\delta(0,1)=0(1,0)+0(0,1) \\ \beta(1,0)+\mu(0,1)=0(1,0)+0(0,1) \\ \gamma(1,0)+\eta(0,1)=0(1,0)+0(0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0,\delta=0 \\ \beta=0,\mu=0 \\ \gamma=0,\eta=0 \end{cases}$$

те је очигледно да су задатих шест оператора стварно *линеарно независни*, те да чине *базис* операторског простора $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$.

(а) Како се сваки вектор ЛВП-а може разложити по базисним векторима (написати као линеарна комбинација базисних вектора), исто важи и за операторе у операторском простору

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\alpha\hat{E}_{11}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\beta\hat{E}_{12}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\gamma\hat{E}_{13}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\delta\hat{E}_{21}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\mu\hat{E}_{22}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\eta\hat{E}_{23}(\xi_1,\xi_2,\xi_3),$$

што даје

$$\begin{aligned}
&(2\xi_1+\xi_3,\xi_1+\xi_2)=\alpha(\xi_1,0)+\beta(\xi_2,0)+\gamma(\xi_3,0)+\delta(0,\xi_1)+\mu(0,\xi_2)+\eta(0,\xi_3)\\
\Leftrightarrow\ &(2\xi_1+\xi_3,\xi_1+\xi_2)=(\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3,\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3)\\
\Rightarrow\ &\underline{\begin{cases}2\xi_1+0\xi_2+1\xi_3=\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3\\ 1\xi_1+1\xi_2+0\xi_3=\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\alpha=2,\beta=0,\gamma=1\\ \delta=1,\mu=1,\eta=0\end{cases}}
\end{aligned}$$

одакле се добија следеће разлаагање првог оператора по задатом базису

$$\hat{A}=2\hat{E}_{11}+0\hat{E}_{12}+1\hat{E}_{13}+1\hat{E}_{21}+1\hat{E}_{22}+0\hat{E}_{23}$$

што значи да се први оператор може написати као уређена шесторка

$$\left[\hat{A}\right]_{\{\hat{E}_i\}}=(2,0,1,1,1,0)\,.$$

Сада се и други задати оператор разлаже по базисним векторима

$$\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\alpha\hat{E}_{11}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\beta\hat{E}_{12}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\gamma\hat{E}_{13}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\delta\hat{E}_{21}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\mu\hat{E}_{22}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\eta\hat{E}_{23}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,,$$

одакле следи

$$\begin{aligned}
&(\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_1+\xi_2)=\alpha(\xi_1,0)+\beta(\xi_2,0)+\gamma(\xi_3,0)+\delta(0,\xi_1)+\mu(0,\xi_2)+\eta(0,\xi_3)\\
\Leftrightarrow\ &(\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_1+\xi_2)=(\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3,\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3)\\
\Rightarrow\ &\underline{\begin{cases}1\xi_1+1\xi_2+1\xi_3=\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3\\ 1\xi_1+1\xi_2+0\xi_3=\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\alpha=1,\beta=1,\gamma=1\\ \delta=1,\mu=1,\eta=0\end{cases}}
\end{aligned}$$

чиме је добијено следеће разлагање другог оператора по задатом базису

$$\hat{B}=1\hat{E}_{11}+1\hat{E}_{12}+1\hat{E}_{13}+1\hat{E}_{21}+1\hat{E}_{22}+0\hat{E}_{23}$$

те се он може написати као уређена шесторка

$$\left[\hat{B}\right]_{\{\hat{E}_i\}}=(1,1,1,1,1,0)\,.$$

На крају се и трећи задати оператор разложи по базисним векторима

$$\hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\alpha\hat{E}_{11}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\beta\hat{E}_{12}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\gamma\hat{E}_{13}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\delta\hat{E}_{21}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\mu\hat{E}_{22}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\eta\hat{E}_{23}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,,$$

одакле се добија

$$\begin{aligned}
&(2\xi_2,\xi_1)=\alpha(\xi_1,0)+\beta(\xi_2,0)+\gamma(\xi_3,0)+\delta(0,\xi_1)+\mu(0,\xi_2)+\eta(0,\xi_3)\\
\Leftrightarrow\ &(2\xi_2,\xi_1)=(\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3,\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3)\\
\Rightarrow\ &\underline{\begin{cases}0\xi_1+2\xi_2+0\xi_3=\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3\\ 1\xi_1+0\xi_2+0\xi_3=\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}\alpha=0,\beta=2,\gamma=0\\ \delta=1,\mu=0,\eta=0\end{cases}}
\end{aligned}$$

те је разлагање трећег оператора по задатом базису дато као

$$\hat{C}=0\hat{E}_{11}+2\hat{E}_{12}+0\hat{E}_{13}+1\hat{E}_{21}+0\hat{E}_{22}+0\hat{E}_{23}$$

те се он може написати као уређена шесторка

$$\left[\hat{C}\right]_{\{\hat{E}_i\}}=(0,2,0,1,0,0)\,.$$

(б) Задати се оператори могу разложити по базисним операторима операторског простора

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\alpha\hat{E}_{11}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\beta\hat{E}_{12}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\gamma\hat{E}_{13}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\delta\hat{E}_{21}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\mu\hat{E}_{22}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\eta\hat{E}_{23}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,,$$

што даје

$$
\begin{aligned}
&(\xi_1+3\xi_2+2\xi_3,\xi_1)=\alpha(\xi_1,0)+\beta(\xi_2,0)+\gamma(\xi_3,0)+\delta(0,\xi_1)+\mu(0,\xi_2)+\eta(0,\xi_3)\\
\Leftrightarrow\ &(\xi_1+3\xi_2+2\xi_3,\xi_1)=(\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3,\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3)\\
\Rightarrow\ &\begin{cases}1\xi_1+3\xi_2+2\xi_3=\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3\\ 1\xi_1+0\xi_2+0\xi_3=\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1,\beta=3,\gamma=2\\ \delta=1,\mu=0,\eta=0\end{cases}
\end{aligned}
$$

одакле се добија следеће разлаагање првог оператора по задатом базису

$$\hat{A}=1\hat{E}_{11}+3\hat{E}_{12}+2\hat{E}_{13}+1\hat{E}_{21}+0\hat{E}_{22}+0\hat{E}_{23}$$

што значи да се први оператор може написати као уређена шесторка

$$\left[\hat{A}\right]_{\{\hat{E}_i\}}=(1,3,2,1,0,0)\,.$$

Сада се и други задати оператор разлаже по базисним векторима

$$\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\alpha\hat{E}_{11}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\beta\hat{E}_{12}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\gamma\hat{E}_{13}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\delta\hat{E}_{21}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\mu\hat{E}_{22}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\eta\hat{E}_{23}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,,$$

одакле следи

$$
\begin{aligned}
&(2\xi_2,0)=\alpha(\xi_1,0)+\beta(\xi_2,0)+\gamma(\xi_3,0)+\delta(0,\xi_1)+\mu(0,\xi_2)+\eta(0,\xi_3)\\
\Leftrightarrow\ &(2\xi_2,0)=(\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3,\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3)\\
\Rightarrow\ &\begin{cases}0\xi_1+2\xi_2+0\xi_3=\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3\\ 0\xi_1+0\xi_2+0\xi_3=\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0,\beta=2,\gamma=0\\ \delta=0,\mu=0,\eta=0\end{cases}
\end{aligned}
$$

чиме је добијено следеће разлагање другог оператора по задатом базису

$$\hat{B}=0\hat{E}_{11}+2\hat{E}_{12}+0\hat{E}_{13}+0\hat{E}_{21}+1\hat{E}_{22}+0\hat{E}_{23}$$

те се он може написати као уређена шесторка

$$\left[\hat{B}\right]_{\{\hat{E}_i\}}=(0,2,0,0,0,0)\,.$$

На крају се и трећи задати оператор разложи по базисним векторима

$$\hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\alpha\hat{E}_{11}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\beta\hat{E}_{12}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\gamma\hat{E}_{13}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\delta\hat{E}_{21}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\mu\hat{E}_{22}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\eta\hat{E}_{23}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,,$$

одакле се добија

$$
\begin{aligned}
&(\xi_1+4\xi_2+2\xi_3,\xi_1)=\alpha(\xi_1,0)+\beta(\xi_2,0)+\gamma(\xi_3,0)+\delta(0,\xi_1)+\mu(0,\xi_2)+\eta(0,\xi_3)\\
\Leftrightarrow\ &(\xi_1+4\xi_2+2\xi_3,\xi_1)=(\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3,\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3)\\
\Rightarrow\ &\begin{cases}1\xi_1+4\xi_2+2\xi_3=\alpha\xi_1+\beta\xi_2+\gamma\xi_3\\ 1\xi_1+0\xi_2+0\xi_3=\delta\xi_1+\mu\xi_2+\eta\xi_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1,\beta=4,\gamma=2\\ \delta=1,\mu=0,\eta=0\end{cases}
\end{aligned}
$$

те је разлагање трећег оператора по задатом базису дато као

$$\hat{C}=1\hat{E}_{11}+4\hat{E}_{12}+2\hat{E}_{13}+1\hat{E}_{21}+0\hat{E}_{22}+0\hat{E}_{23}$$

те се он може написати као уређена шесторка

$$\left[\hat{C}\right]_{\{\hat{E}_i\}}=(1,4,2,1,0,0)\,.$$